# Der Laplace-Operator auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit

(Eine kurze Einführung im Rahmen des Seminars 'Spektraltheorie des Laplace-Operators', Sommersemester 2009)

Inhalt:

1) Einführung

2) (Unter-) Mannigfaltigkeiten

3) Gradient, Divergenz, Laplace-Operator: Ihre **geometrische Bedeutung** und Definition auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

## 1 Einführung

Thema des Seminars sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators, also Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u = \lambda u. \tag{1}$$

Die Unbekannten hierbei sind $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Funktion $u$. Im einfachsten Fall ist $u$ eine Funktion auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die zusätzlich Randbedingungen erfüllt (z.B., dass $u$ auf dem Rand von $\Omega$ gleich Null ist). $\Delta$ ist der Laplace-Operator, der im $\mathbb{R}^n$ durch

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}$$

gegeben ist.[1]

Wir werden von Anfang an diese Gleichung in einem allgemeineren Kontext betrachten, wo $\Omega$ durch eine *kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand $M$* ersetzt wird.

Da die Kenntnis dieses Begriffs nicht vorausgesetzt wird, soll er hier kurz eingeführt werden. Dabei beschränken wir uns auf den Fall einer *Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ (mit Rand)*, da dieser aus Analysis III bekannt ist[2]. Allerdings muss geklärt werden, was der 'Laplace-Operator' auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist (der dann auch *Laplace-Beltrami-Operator* genannt wird).

Warum betrachten wir auch Mannigfaltigkeiten, nicht nur euklidische Gebiete?

- Mit Hilfe der Lösungen von (1) kann man die Schwingungen einer ebenen Membran (falls $n = 2$) beschreiben. Genauso von Interesse sind aber auch Schwingungen etwa von gekrümmten Flächen.

- Bei Problemen im $\mathbb{R}^n$, die eine Rotationssymmetrie haben, ist es meist sinnvoll, Polarkoordinaten einzuführen und die auftretenden Operatoren (z.B. partielle Ableitungen, Laplace-Operator) in diesen Koordinaten auszudrücken.

[1] Einer Konvention in der Riemannschen Geometrie folgend, schreibe ich die Indizes der Koordinaten oben, also $x^1$ statt $x_1$ etc. $x^2$ ist also die zweite Koordinate, nicht $x$ Quadrat. Warum diese Konvention? Sehen Sie mal unter 'Einsteinsche Summationskonvention' nach.

[2] Dies stellt nicht wirklich eine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da jede (abstrakte) kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit als Untermannigfaltigkeit eines $\mathbb{R}^N$ realisiert werden kann. Dies ist ein berühmter, schwieriger Satz von Nash. Die Übertragung der Begriffe und Überlegungen auf abstrakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist unmittelbar, wenn man einmal diesen Begriff (und den Begriff des Tangentialraums) kennt.

Polarkoordinaten von $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, sind $(r, \omega)$, wobei $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$, also $x = r\omega$. Hierbei ist $r > 0$, $\omega \in S^{n-1}$ (Einheitssphäre). Später im Seminar wird gezeigt werden, dass

$$\Delta^{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega^{S^{n-1}}.$$

Hierbei tritt also der Laplace-Beltrami-Operator auf der Sphäre ganz natürlich auf. Dementsprechend spielen dessen Eigenfunktionen (die sogenannten Kugelfunktionen) in vielen Problemen mit Rotationssymmetrie eine große Rolle.

- Für bestimmte Manngifaltigkeiten (z.B. sogennannte Riemannsche Flächen) ergeben sich sehr interessante Beziehungen zu anderen Teilen der Mathematik, z.B. zur Zahlentheorie.

- Ein technischer Grund: Für manche Fragen über Eigenfunktionen und Eigenwerte stellt der Rand des betrachteten Gebietes eine besondere Schwierigkeit dar. Nun hat jedes beschränkte Gebiet im $\mathbb{R}^n$ einen Rand, aber es gibt viele kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand (z.B. die Sphäre), bei denen man sich also diese Schwierigkeit zunächst sparen kann!

Schließlich: Viele der im Seminar behandelten Themen sind nicht schwieriger für Riemannsche Mannigfaltigkeiten als für euklidische Gebiete. (Manche allerdings schon. Das liegt dann im wesentlichen daran, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$ konstante Koeffizienten hat, der Laplace-Beltrami-Operator – in lokalen Koordinaten – aber variable.)

In dieser Einführung lege ich Wert darauf, Gradient, Divergenz und Laplace nicht einfach mittels Definition und nachrechnen 'wichtiger' Rechen-Eigenschaften einzuführen, wie dies leider in vielen Differentialgeometrie-Büchern gemacht wird. Stattdessen gehe ich von deren geometrischer Bedeutung aus, diese führt dann automatisch zur 'korrekten' Definition.

## 2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$

Erinnerung: $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt **$n$-dimensionale Unter-Mannigfaltigkeit**, falls $M$ durch lokale Karten überdeckt werden kann. Das heißt, zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U$ von $p$ in $M$, eine offene Teilmenge $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ sowie eine Abbildung (lokale Karte) $\varphi : \widetilde{U} \longrightarrow U$. Diese soll glatt (d.h. unendlich oft differenzierbar[3]) und bijektiv sein sowie eine Immersion (d.h. $d\varphi|_x$ ist injektiv $\forall x \in \widetilde{U}$).[4]

Bedeutung: Ist $\varphi$ eine lokale Karte, $p \in U$ und $x \in \widetilde{U}$ der Punkt mit $\varphi(x) = p$, so heißen $x^1, \ldots, x^n$ die *lokalen Koordinaten* von $p$ (bzgl. der Karte $\varphi$). Punkte von $M$ lassen sich also (lokal) durch $n$ Zahlen beschreiben.

*Beispiel:* $S^2$ (also $n = 2$, $N = 3$). Eine Karte für $U =$ die offene obere Halbsphäre ist gegeben durch

$$\varphi(x^1, x^2) = \left(x^1, x^2, \sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}\right)$$

(Hierbei ist $\widetilde{U} = \{(x^1, x^2) : (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1\}$.) Es gibt auch andere Karten, z.B. die stereographische Projektion.

[3] eigentlich reicht für die meisten Zwecke auch zweimal differenzierbar, aber sich darüber Gedanken zu machen, lenkt nur von wichtigerem ab

[4] Genau genommen muss zusätzlich $\varphi : \widetilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus sein, das lässt sich aber durch Verkleinern von $U$ und $\widetilde{U}$ immer erreichen.

Jedes Objekt auf $M$ lässt sich 'in lokalen Koordinaten schreiben'. Zum Beispiel Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$: Ist $\varphi : \widetilde{U} \to U$ eine lokale Karte, so setze

$$\tilde{f} := f \circ \varphi, \quad \tilde{f} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}.$$

Hat $p$ die Koordinaten $x$, so ist also $f(p) = \tilde{f}(x)$, also ist $\tilde{f}$ '**die Funktion $f$ in den lokalen Koordinaten**, die durch $\varphi$ definiert sind'.

Der **Tangentialraum** an $M$ im Punkt $p \in M$ ist definiert durch

$$T_pM = \left\{ v \in \mathbb{R}^N : \text{ es gibt } \epsilon > 0 \text{ und } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = p, \ \dot{\gamma}(0) = v \right\}$$

d.h. die Menge der Vektoren, die Tangenten von in $M$ verlaufenden Kurven durch $p$ sind. Für jedes $p$ ist $T_pM$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum. Zum Rechnen ist es nützlich, eine Basis von $T_pM$ zu haben. Gegeben eine lokale Karte $\varphi$, erhält man eine Basis von $T_pM$ wie folgt:

Sei $x \in \widetilde{U}$ der Punkt mit $\varphi(x) = p$. Für $i = 1, \ldots, n$ betrachte den Weg $\gamma_i(t) = \varphi(x + te_i)$ ($e_i$ ist der $i$-the Standard-Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$). Dann $\gamma_i(0) = \varphi(x) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x)$, dies ist also ein Tangentialvektor an $M$ in $p$. Man schreibt kurz

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} := \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x), i = 1, \ldots, n$$

oder auch $\partial_{i|p}$, wenn man deutlich machen will, dass dieser Vektor vom Punkt $p$ abhängt. (Man muss auch immer daran denken, dass er zusätzlich von der Wahl der Karte $\varphi$ abhängt). $\partial_{1|p}, \ldots, \partial_{n|p}$ ist eine Basis von $T_pM$.

Anschaulich: Das Koordinatennetz des $\mathbb{R}^n$ (d.h. die zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden) wird durch $\varphi$ auf ein 'Koordinatennetz' auf $U \subset M$ übertragen. Durch jeden Punkt von $U$ gehen $n$ Koordinatenlinien, und $\partial_{1|p}, \ldots, \partial_{n|p}$ sind tangential an diese Linien.

Beispiel: $S^2$ mit der Karte von oben:

$$\partial_1 = (1, 0, -\frac{x^1}{\sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}), \ \partial_2 = (0, 1, -\frac{x^2}{\sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}))$$

**Geometrie in $M$:**

Alle geometrischen Größen in $M$ (z.B. Längen, Winkel, Volumina, auch der Laplace-Beltrami-Operator) lassen sich mit Hilfe eines fundamentalen Objekts ausdrücken: Der (induzierten)[5] **Riemannschen Metrik $g$ auf $M$**. Diese ist gegeben durch ein Skalarprodukt $g_p$ auf $T_pM$, für jedes $p \in M$, definiert durch

$$g_p(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^N} \text{ für } v, w \in T_pM$$

Das Paar $(M, g)$ nennt man eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Beispiel: Wie berechnet man die Länge einer Kurve in $M$ mittels $g$? Sei $\gamma : [a, b] \to M$ glatte Kurve. Wegen $M \subset \mathbb{R}^N$ ist $\gamma$ eine Kurve im $\mathbb{R}^N$, und wir haben die bekannte Formel $L[\gamma] = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$ für deren Länge. Nun ist $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ für jedes $t$, also lässt sich dies umschreiben als

$$L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} \, dt.$$

[5] induziert heißt, dass sie mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$ im $\mathbb{R}^N$ definiert ist

**Darstellung von $g$ in lokalen Koordinaten:** Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum lässt sich bzgl. einer gegebenen Basis als symmetrische Matrix darstellen. Wir tun dies für $g_p$ bzgl. der Basis $\partial_{1|p}, \ldots, \partial_{n|p}$, für eine gegebene lokale Karte $\varphi$ nahe $p$. Das heißt, wir setzen

$$g_{ij}(x) := g_p(\partial_i, \partial_j) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}(x) \right\rangle \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

Sind dann $v, w \in T_pM$ beliebig und in der Basis als $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$, $w = \sum_{i=1}^n w^i \partial_i$ dargestellt, so folgt

$$g_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v^i w^j \tag{2}$$

Für jedes $x \in \widetilde{U}$ ist $(g_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Wir haben also eine Funktion auf $\widetilde{U}$ mit Werten in den symmetrischen $n \times n$ Matrizen.

Beispiel: Für die Sphäre mit der Karte von oben gilt:

$$\begin{aligned} g_{12}(x) = g_{21}(x) &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{x^1 x^2}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \\ g_{11}(x) &= 1 + \frac{(x^1)^2}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \\ g_{22}(x) &= 1 + \frac{(x^2)^2}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} \end{aligned}$$

$$(g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{pmatrix}$$

**Integration über $M$:**

In Analysis III hatten wir gesehen, dass es sinnvoll ist, das Integral einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ wie folgt zu definieren: Man teilt $M$ in Kartengebiete auf und setzt dann für ein Kartengebiet

$$\int_U f \, dS := \int_{\widetilde{U}} f(\varphi(x)) \sqrt{g_\varphi(x)} \, dx$$

Hierbei ist $g_\varphi$ die Gramsche Determinante[6], $g_\varphi(x) = \det\left(d\varphi^t_{|x} d\varphi_{|x}\right)$. Nun ist $d\varphi_{|x}$ die Matrix mit Spalten $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(x)$, also

$$d\varphi^t_{|x} d\varphi_{|x} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^t \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right)^t \end{pmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\right) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} \right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \right\rangle & \cdots & \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} \right\rangle \end{pmatrix} = (g_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}$$

also folgt

$$\int_U f \, dS = \int_{\widetilde{U}} (f \circ \varphi) \cdot \sqrt{\det(g_{ij})} dx.$$

[6] Wie ist diese Formel zu verstehen? Woher kommt der $\sqrt{g_\varphi}$-Faktor? Im Wesentlichen daher, dass das $n$-dimensionale Volumen eines von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ im $\mathbb{R}^N$ aufgespannten Parallelotops gleich $\sqrt{\det A^t A}$ ist, wobei $A$ die Matrix mit Spalten $v_1, \ldots, v_n$ ist. Überlegen Sie, wie daraus die Formel für das Integral folgt!

**Beispiel:** Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit, mit der einen Karte $\varphi = \mathrm{id}$. Dann $\partial_i = e_i$ und $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Andere Karten für $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sind durch die Einschränkung der Abbildung

$$\varphi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ (r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$$

auf $(0,\infty)\times(a,b)$, für beliebige $a < b$ mit $b-a \leq 2\pi$, gegeben. Dies ergibt *Polarkoordinaten*. Man erhält (mit hoffentlich offensichtlicher Notation)

$$\partial_r = (\cos\theta, \sin\theta),\ \partial_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

und

$$g_{rr} = 1, g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0,\ g_{\theta\theta} = r^2.$$

Die letzte Gleichung drückt aus, dass, wenn $r$ fest bleibt und $\theta$ sich mit Geschwindigkeit eins ändert, der Punkt $\varphi(r, \theta)$ sich mit Geschwindigkeit $r(= \sqrt{g_{\theta\theta}})$ bewegt.

Es folgt $\sqrt{\det(g_{ij})} = r$, wir erhalten also das bekannte Ergebnis, dass das Integral einer Funktion in Polarkoordinaten $\int \tilde{f}(r, \theta)\, r\, dr d\theta$ ist.

# 3 Gradient, Divergenz, Laplace

In Analysis II und III haben wir die Operatoren Gradient und Divergenz kennengelernt: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Gradient einer glatten Funktion $f$ auf $\Omega$ ist das Vektorfeld

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right). \tag{3}$$

Die Divergenz eines glatten Vektorfeldes $V = (V^1, \ldots, V^n)$ auf $\Omega$ ist die Funktion

$$\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^i}{\partial x^i}. \tag{4}$$

Der Laplace-Operator lässt sich dann ausdrücken als

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f \tag{5}$$

Wir werden $\nabla$, div und $\Delta$ nun für Funktionen und Vektorfelder auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ definieren.

## 3.1 Der Gradient

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ glatt. Was ist eine sinnvolle Definition von $\nabla f$? Verschiedene Ideen scheinen zunächst nahe zu liegen:

- Verwende dieselbe Formel wie im $\mathbb{R}^n$, also (3) (mit $N$ statt $n$). Das macht aber keinen Sinn, da $f$ nur *auf $M$ definiert* ist, nicht in einer Umgebung von $M$ (die Richtungen, in die man für $\partial f / \partial x^i$ ableitet, zeigen im Allg. aus $M$ heraus)[7].

[7] Und selbst wenn man $f$ zu einer glatten Funktion $F$ auf einer offenen Umgebung von $M$ fortsetzen würde – was immer geht –, würde $\nabla F(x)$ selbst für Punkte $x \in M$ von der Wahl von $F$ abhängen. (Beispiel: $M =$ die $x$-Achse in $\mathbb{R}^2$, $f = 0$ mit Fortsetzungen $F_1 = 0$, $F_2(x, y) = y$.)

- Stelle $f$ in einer lokalen Karte dar, d.h. betrachte $\tilde{f}(x) = f(\varphi(x))$, und setze $\nabla f = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n}\right)$. Das ist auch nicht sinnvoll, denn das Resultat wird von der Wahl der lokalen Karte abhängen.[8]

Beides funktioniert also nicht.

> **Leitgedanke:** Bestimme die geometrische Bedeutung von $\nabla f$ im $\mathbb{R}^n$, übertrage diese auf den Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und leite daraus eine Formel her.

Zunächst im $\mathbb{R}^n$:

**Geometrische Bedeutung von $\nabla f(x)$:** Der Vektor, der in Richtung des steilsten Anstiegs von $f$ zeigt und dessen Länge die 'Steilheit' dieses Anstiegs angibt.

Übertragung in Formeln: Diese Eigenschaften folgen aus

$$\langle \nabla f(x), v \rangle = df_x(v) \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n \tag{6}$$

Hierbei ist $df_p$ das Differential von $f$ bei $p$, d.h. $df_p(v)$ ist die Richtungsableitung von $f$ in Richtung $v$. Beachte, dass der Vektor $\nabla f(x)$ durch die Forderung (6) eindeutig festgelegt ist[9]. In Analysis III wurde (6) zur Definition von $\nabla f(x)$ verwendet und gezeigt, dass es die geometrischen Eigenschaften impliziert.

Erinnerung: Richtungsableitung im $\mathbb{R}^n$:

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(p + tv). \tag{7}$$

(Momentane Änderungsrate von $f(q)$, wenn $q$ von $p$ mit Geschwindigkeit $v$ wegläuft.) In Analysis III hatten wir gezeigt, dass auch

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(\gamma(t)) \tag{8}$$

für eine beliebige Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ gilt.[10] (7) ist der Spezialfall $\gamma(t) = p + tv$.

Nun zum Fall von $f : M \to \mathbb{R}$:

Wir **definieren die Richtungsableitung** $df_p(v)$ im Punkt $p \in M$ in Richtung $v \in T_pM$ durch (8), wobei $\gamma$ eine beliebige Kurve *in* $M$ ist mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$.

Beachte:

- Im Fall $\mathbb{R}^n$ erhält man die alte Definition zurück.
- Im Fall von $M$ kann man im Allg. nicht $\gamma(t) = p + tv$ nehmen, da dieser Weg aus $M$ herausführt, also $f(\gamma(t))$ nicht definiert ist.
- Aber für Tangentialvektoren $v \in T_pM$ gibt es ganz in $M$ verlaufende Kurven $\gamma$ mit $\dot{\gamma}(0) = v$, und für diese ist $f(\gamma(t))$ für alle $t$ definiert.

[8] Übung! Folgt auch aus der weiter unten bewiesenen Formel.
[9] Dies ist das Riesz Lemma aus der Funktionalanalysis, im (einfachen) endlich-dimensionalen Fall.
[10] Folgt aus der Kettenregel.

**Definition des Gradienten:** $\nabla f(p)$ ist der Vektor in $T_pM$, für den

$$g_p(\nabla f(x), v) = df_p(v) \quad \text{für alle } v \in T_pM \tag{9}$$

gilt. Dies entspricht genau (6), und genau wie dort folgen daraus die geometrischen Eigenschaften des Gradienten.

**Zusammenfassung:** Die Richtungsableitung einer Funktion lässt sich (für Tangentialvektoren) auch für Funktionen, die nur auf einer Untermannigfaltigkeit definiert sind, erklären. Der Gradient lässt sich dann mittels der Richtungsableitung definieren.

In diesem Sinne ist die Richtungsableitung (oder das Differential $df$) ein fundamentaleres Objekt als der Gradient $\nabla f$.

**Formel in Koordinaten:** Sei $\varphi$ eine lokale Karte und $\partial_1, \dots, \partial_n$ die durch $\varphi$ definierte Basis von $T_pM$. Wir wollen die $a^i$ in der Basisdarstellung

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{n} a^i \partial_i$$

bestimmen. Wir erwarten, diese durch die partiellen Ableitungen von $\tilde{f} := f \circ \varphi$ ausdrücken zu können. Sei $v \in T_pM$, $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$, $v^i \in \mathbb{R}$. Zunächst ist $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} = \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial x^i} = df\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right) = df(\partial_i)$ (in der Mitte wurde die Kettenregel verwendet)[11], also wegen der Linearität von $df_p$

$$\begin{aligned} df_p(v) &= \sum v^i df_p(\partial_i) \\ &= \sum v^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Gleichung (9) sagt also (mittels (2))

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i a^j = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} \quad \text{für alle } (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$$

Das ist äquivalent zu $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n g_{ij}\, a^j$ für $i = 1, \dots, n$, d.h. der Vektor $(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^n})$ ist das Produkt der Matrix $(g_{ij})$ mit dem Vektor $(a^1, \dots, a^n)$. Sei nun

$$(g^{ij})_{i,j=1,\dots,n} := \text{ Inverse Matrix zu } (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Dann folgt

$$\boxed{\nabla f = \sum_i a^i \partial_i \text{ mit } a^i = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^j}}$$

**Beispiele:**

$M = \mathbb{R}^n$, $\varphi = \mathrm{id}$, dann ist $\tilde{f} = f$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, also $a^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ und damit $\nabla f = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \partial_i = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x^n}\right)$ wegen $\partial_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Beispiel Polarkoordinaten: Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\tilde{f}(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, so

$$\nabla f = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \partial_\theta$$

[11] Genauer sollte man überall angeben, wo ausgewertet wird, also $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial x^i}(x) = df_{|\varphi(x)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x)\right) = df_p(\partial_{i|p})$. Der Übersichtlichkeit halber sind $x$ und $p$ aber im Folgenden teils weggelassen.

## 3.2 Die Divergenz

Ein Vektorfeld auf $M$ ist eine Vorschrift, die jedem $p \in M$ ein $V(p) \in T_pM$ 'glatt' zuordnet, d.h. in lokalen Koordinaten

$$V = \sum_{i=1}^{n} V^i \partial_i$$

mit $V^i$ glatt $\forall i$.

Im $\mathbb{R}^n$ war die Divergenz durch $\operatorname{div} V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V^i}{\partial x^i}$ definiert.

**Geometrische Bedeutung der Divergenz**: $\operatorname{div} V =$ momentane Volumenänderung unter dem Fluss von $V$:

$$\int_\Omega \operatorname{div} V\, dx = \frac{d}{dt|_{t=0}} \operatorname{vol}(\phi_t(\Omega))\ \forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{$**$}$$

$\phi_t =$ Fluss von $V$, $V$ definiert auf Umgebung von $\overline{\Omega}$.

Die rechte Seite von $(**)$ ist auch auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit definiert, falls $\Omega \subset M$ (da $V$ überall tangential an $M$ ist, bildet der Fluss Teilmengen von $M$ auf Teilmengen von $M$ ab). Man könnte nun $\operatorname{div} V$ als die eindeutige Funktion auf $M$ definieren, für die $(**)$ für alle $\Omega \subset M$ gilt (wobei links $dx$ durch $dS$ ersetzt wird). Zunächst ist nicht klar, dass es eine solche Funktion gibt. Um dies zu zeigen und eine Formel für $\operatorname{div} V$ zu erhalten, gehen wir wie folgt vor.

**Lemma:** Aus $(**)$ folgt die "partielle Integrationsformel":

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{div} V\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, V\rangle dx} \tag{$***$}$$

für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.[12]

**Beweis:** Setze $W = f \cdot V$. Wende $(**)$ auf $W$ an, wobei $\Omega$ so gewählt ist, dass es den Träger von $f$ enthält. Da $f = 0$ in einer Umgebung von $\partial\Omega$ gilt, folgt $\phi_t(\Omega) = \Omega$ für alle $t$, also

$$(**) \Rightarrow \int_\Omega \operatorname{div} W = 0$$

Mit $\operatorname{div} W = \operatorname{div}(f \cdot V) = \langle \nabla f, V\rangle + f \cdot \operatorname{div} V$ folgt die Behauptung.

Übertragung auf Mannigfaltigkeiten: Sei $V$ Vektorfeld auf $M$.

**Definition:** $\operatorname{div} V$ ist die Funktion auf $M$, für die gilt[13]:

$$\forall f \in C_0^\infty(M) \qquad \text{ist} \qquad \int_M f \operatorname{div} V dS = -\int_M g(\nabla f, V)\, dS$$

[12] $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) =$ Funktionen mit kompaktem Träger.

[13] Dass es genau eine solche Funktion gibt, folgt im Prinzip wieder aus dem Riesz Lemma. Hier zeigt man es aber besser direkt: Die Existenz sieht man mittels der Formel in lokalen Koordinaten, siehe unten, die Eindeutigkeit wie im Beweis des Riesz-Lemmas. Direkte Anwendung des Existenz-Teils des Riesz-Lemmas ist ungünstig, da erstens nicht offensichtlich ist, dass das Funktional $f \mapsto -\int_M g(\nabla f, V)\, dS$ auf $L^2(M, dS)$ beschränkt ist (wegen der rechts auftretenden Ableitungen), und da zweitens dann noch separat gezeigt werden muss, dass $\operatorname{div} V$ glatt ist.

**Bemerkung:** Man kann zeigen, dass damit auch (**) gilt (mit $dS$ statt $dx$ und $\Omega \subset M$).

In Koordinaten ist $g(\nabla f, V) = \sum_i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^i} V^i$ und $dS = \sqrt{\det g}\, dx$. Sei der Träger von $f$ in der Koordinatenumgebung enthalten, dann folgt

$$\begin{aligned}\int \widetilde{f} \operatorname{div} V \sqrt{\det g}\; dx &= -\int \sum_i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^i} V^i \sqrt{\det g}\; dx \\ &= \int \widetilde{f} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( V^i \sqrt{\det g} \right) dx\end{aligned}$$

mit partieller Integration. Dies gilt für alle $f$, also folgt

$$\boxed{\operatorname{div} V = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left( V \sqrt{\det g} \right)}$$

## 3.3 Laplace-Beltrami-Operator

Wir definieren den Laplace-Beltrami-Operator als

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta &:= \operatorname{div} \nabla \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i}\, g^{ij}(x) \sqrt{\det g}\, \frac{\partial}{\partial x^j}\end{aligned}}$$

Nach Herleitung ist dies invariant, d.h. man erhält denselben Operator $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, egal welche Koordinaten man verwendet. Man kann sich fragen, ob $\Delta$ eine unmittelbare geometrische Bedeutung hat. Dies ist der Fall. Er gibt die lokale Abweichung von der Gültigkeit der Mittelwerteigenschaft an.

Leiten wir diese zunächst im $\mathbb{R}^n$ her: Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach Taylor ist für $x$ in einer Umgebung von Null

$$f(x) = f(0) + \sum_i f_i x^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{i,j}\, x^i x^j + O(|x|^3)$$

wobei $f_i = \partial_i f(0)$ etc. Integriere über eine Sphäre $S_r(0) = \{x : |x| = r\}$. Die $x^i$-Terme fallen wegen Antisymmetrie weg, ebenfalls die $x^i x^j$ Terme mit $i \neq j$. Jedes der Integrale $\int_{S_r(0)} (x^i)^2$ ist gleich, also gleich $\frac{1}{n}$ mal dem Integral über $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$, und dies ist gleich $r^2$ auf der Sphäre. Setzt man dies ein und teilt durch das Volumen von $S_r(0)$, folgt

$$\frac{1}{|S_r(0)|} \int_{S_r(0)} f = f(0) + \frac{1}{2n} \Delta f(0) r^2 + O(r^3),$$

also, wenn man noch 0 durch einen beliebigen Punkt $x$ ersetzt,

$$\boxed{\Delta f(x) = 2n \lim_{r \to 0} r^{-2} \left( \frac{1}{|S_r(x)|} \int_{S_r(x)} f - f(x) \right)}$$

Dies gilt auch für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, wobei $S_r(x)$ die Menge der Punkte im Abstand $r$ von $x$ ist.

Beweisskizze: Man zeigt zunächst, dass es ein Koordinatensystem gibt, in dem $g_{ij}(y) = \delta_{ij} + O(|y - x|^2)\, \forall i, j$ gilt (z.B. sogenannte Normalkoordinaten). Dann ist $\Delta f(x) = \sum_i \partial_i^2 f(x)$ (nur am Punkt $x$!). Man überlegt sich dann, dass der limes auf der rechten Seite gleich bleibt, wenn man die euklidische durch die $g$-Sphäre um $x$ ersetzt. Das zeigt die Behauptung.