D. Grieser
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Zi. 12, Beringstr. 4
email: grieser@math.uni-bonn.de

Übung zur Vorlesung 'Einführung in die Spektralgeometrie' (SS 2004)

Blatt 1

Problem 1 (Kugelfunktionen)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Eigenwerte und -funktionen des Laplace-Operators auf der Sphäre $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ zu bestimmen.

(*a*) Sei f eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, die k-homogen ist, d.h. $f(sx) = s^k f(x)$ für alle s, x. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f_{|S^{n-1}}$, falls nicht identisch gleich Null, eine Eigenfunktion des Laplace-Operators auf S^{n-1} ist, mit Eigenwert $k(k+n-2)$.

(Hinweis: Verwenden Sie 'Euler's Homogenitätsrelation' $r\frac{\partial f}{\partial r} = kf$.)

Zeigen Sie umgekehrt: Ist f eine Eigenfunktion auf der Sphäre, so läßt sie sich zu einer harmonischen Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ geeigneter Homogenität fortsetzen.

(*b*) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei P_k der Raum der k-homogenen Polynome auf $\mathbb{R}^n$, und $P_k = \{0\}$ für $k < 0$. Dann ist $\Delta : P_k \to P_{k-2}$. Sei $H_k = \ker \Delta \subset P_k$. Zeigen Sie

$$P_k = H_k \oplus r^2 P_{k-2} = H_k \oplus r^2 H_{k-2} \oplus r^4 H_{k-4} \oplus \dots$$

wobei $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass Δ der zu $r^2 : P_{k-2} \to P_k$ (Multiplikationsoperator) adjungierte Operator ist, wenn man auf allen P_k das Skalarprodukt

$$< x^\alpha, x^\beta > := \partial_x^\alpha x^\beta = \alpha! \delta_{\alpha,\beta}$$

einführt, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$, $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$)

(*c*) Sei S_k der Raum der Einschränkungen von Funktionen in H_k auf S^{n-1}. Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung $H_k \to S_k$ injektiv ist. Berechnen Sie $\dim S_k$.

(*d*) Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{k=0}^\infty S_k$ dicht in $L^2(S^{n-1})$ ist. (Hinweis: Stone-Weierstraß)

(*e*) Folgern Sie: Die Eigenwerte des Laplaceoperators auf S^{n-1} sind $\mu_k = k(k+n-2)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Der Eigenraum zu μ_k ist S_k, d.h. besteht genau aus den Einschränkungen harmonischer k-homogener Polynome auf $\mathbb{R}^n$. (Diese heißen 'Kugelfunktionen'.)

(*f*) Bestimmen Sie Basen für H_k für einige kleine Werte von n, k. Was ist S_k für $n = 2$ (und k beliebig)?