D. Grieser
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Zi. 12, Beringstr. 4
email: grieser@math.uni-bonn.de

Übung zur Vorlesung 'Einführung in die Spektralgeometrie' (SS 2004)

Blatt 2

Problem 1 (Wärmekern auf S^1) Zeigen Sie, dass der Wärmekern auf $S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ sich aus dem Wärmekern von $\mathbb{R}$ mittels

$$K_{S^1}(t,x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_{\mathbb{R}}(t, x+2\pi k, y)$$

berechnen läßt.

Folgern Sie die Inversionsformel für die Theta-Funktion $\theta(s) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\pi s m^2}$:

$$\theta(s) = s^{-1/2}\theta(1/s).$$

(Bemerkung: Dies kann auch mittels der Poissonschen Summenformel gezeigt werden. Das läuft im Wesentlichen auf's Gleiche hinaus, nur dass man die Wellengleichung statt der Wärmeleitungsgleichung verwendet.)

Problem 2 (Wärmekoeffizienten) Die Zahlen $a_{i/2}$ in der Asymptotik

$$\sum_j e^{-t\lambda_j} \sim_{t\to 0} (4\pi t)^{-n/2}(a_0 + a_{1/2}t^{1/2} + a_1 t + \dots), \tag{1}$$

wobei $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte (mit Multiplizität aufgezählt) des Laplace-Operators auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M, evtl. mit Rand, sind, heißen *Wärmekoeffizienten*.

(*a*) Zeigen Sie, dass für den Kreis alle Wärmekoeffizienten außer a_0 verschwinden.

(*b*) Dasselbe für flache Tori.

(*c*) Bestimmen Sie die Wärmekoeffizienten für ein Intervall.

(*d*) Berechnen Sie die Wärmekoeffizienten für die 2-Sphäre.

Problem 3 (Störungsformel für Exponential einer Matrix) Seien A, B quadratische Matrizen. Beweisen Sie die Störungsformel

$$e^{A+\epsilon B} = e^A + \epsilon \int_0^1 e^{(1-s)A} B e^{sA}\, ds + \epsilon^2 \int_0^1 \int_0^{s_1} e^{(1-s_1)A} B e^{(s_1-s_2)A} B e^{s_2 A}\, ds_2\, ds_1 + \dots.$$