Inhaltsverzeichnis

Liste der eingereichten Arbeiten

[GJ1] D.Grieser, D.Jerison, *Asymptotics of the first nodal line of a convex domain*, Inventiones Math. **125**(1996), 197-219.

[GJ2] D.Grieser, D.Jerison, *The size of the first eigenfunction of a convex planar domain*, Journal of the AMS **11**(1998), 41-72.

[G1] D.Grieser, *Local geometry of singular real analytic surfaces*, Preprint, 1999.

[G2] D.Grieser, *Variations on quasiisometry*, Preprint, 1999.

[G3] D.Grieser, *Basics of the b-calculus*, wird erscheinen in J. Gil et al. [Hrsg.], *Approaches to Singular Analysis,* Advances in Partial Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 2000.

[GG] D.Grieser, M.Gruber, *Singular asymptotics lemma and Push-forward theorem*, wird erscheinen in J. Gil et al. [Hrsg.], *Approaches to Singular Analysis,* Advances in Partial Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 2000.

[CGIKO] S.Chanillo, D.Grieser, M.Imai, K.Kurata, I.Ohnishi, *Symmetry breaking and other phenomena in the optimization of eigenvalues for composite membranes*, wird erscheinen in Comm. Math. Physics.

[CGK] S.Chanillo, D.Grieser, K.Kurata, *The free boundary problem in the optimization of composite membranes*, wird erscheinen in Contemp. Math., AMS.

Einleitung

Die Arbeiten, die in dieser Habilitationsschrift zusammengefaßt sind, behandeln Probleme der singulären Analysis. Hierbei bedeutet ‚Analysis' das Studium der Lösungen partieller Differentialgleichungen, insbesondere des Spektralproblems elliptischer Operatoren, und ‚singulär' die Betonung von Phänomenen, die von Nichtglattheit oder nicht gleichmäßiger Elliptizität der Koeffizientenmatrix herrühren. Die Operatoren sind meist geometrischen Ursprungs, z.B. Laplace-Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten; der singuläre Charakter entsteht dann durch die singuläre Natur des zugrundeliegenden Raumes.

Zunächst gebe ich einen Überblick über das mathematische Umfeld, in das sich diese Habilitationsschrift einordnet. Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) sind in natürlicher Weise mehrere elliptische partielle Differentialoperatoren gegeben: Der Laplace- (oder Laplace-Beltrami-) Operator Δ, der auf Funktionen oder allgemeiner auf Differentialformen über M operiert, und die zu verschiedenen Bündeln assoziierten Dirac-Operatoren.

Eines der großen Probleme der Mathematik des 20. Jahrhunderts besteht darin, die Zusammenhänge zwischen den analytischen Eigenschaften dieser Operatoren und den geometrischen und topologischen Eigenschaften von M zu verstehen. Für die folgenden Betrachtungen sei zunächst M kompakt. Einige der interessanten analytischen Eigenschaften sind dann:

(a) Die Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \to \infty$ und Eigenfunktionen $u_1, u_2, \ldots$ von Δ; deren Untersuchung zerfällt in zwei Problembereiche sehr unterschiedlichen Charakters:

  (a1) ‚kleine' Eigenwerte (etwa λ_1, u_1),

  (a2) ‚große' Eigenwerte (asymptotisches Verhalten von λ_i, u_i für $i \to \infty$).

  Wichtige Eigenschaften der Eigenfunktionen sind etwa die Größe und Lage der Knotenmenge $u_i^{-1}(0)$ und der kritischen Menge $|du_i|^{-1}(0)$, die Größe des Maximums von $|u_i|$ relativ zur L^2-Norm sowie Konzentrationsphänomene auf kleinen Mengen.

(b) Der Fredholm-Index der Dirac-Operatoren.

Weitere wichtige analytische Eigenschaften, auf die ich in dieser Arbeit nicht näher eingehe, sind die Determinante von Δ, die η-Invariante und die analytische Torsion; außerdem die Streutheorie von Δ, die für nicht-kompaktes vollständiges M Punkt (a) ersetzt.

Das Interesse an diesen Eigenschaften ist zum Teil physikalisch motiviert: Die Eigenwerte von Δ sind gerade die Resonanzfrequenzen eines schwingenden Körpers der ‚Form' M und die Eigenfunktionen zeigen die Form der Schwingung an; gleichzeitig sind die Eigenwerte die möglichen scharfen Werte der Energie eines quantenmechanischen Teilchens, das sich auf M frei bewegt, und die Eigenfunktionen sind die zugehörigen Zustandsfunktionen. Der Index ist in der String-Theorie wichtig.

Die Behandlung derartiger Probleme setzt das Verständnis der grundlegenden Eigenschaften elliptischer Operatoren voraus. Dazu gehören insbesondere:

(c) Existenz und Eindeutigkeit, allgemeiner Fredholmtheorie; Regularität; Selbstadjungiertheit symmetrischer Operatoren; Diskretheit des Spektrums.

Für kompakte Mannigfaltigkeiten mit hinreichend glatter Metrik sind diese Punkte seit langem wohlverstanden, siehe z.B. [25]; ebenso für kompakte Mannigfaltigkeiten mit stückweise glattem Rand, z.B. Gebiete im $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

Zu den oben erwähnten Problemen gibt es eine umfangreiche Literatur. Die Untersuchung der Eigenwerte von Δ wurde dabei wesentlich durch die Bemühungen um das *inverse Spektralproblem* (M aus $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ zu rekonstruieren, [52]) vorangetrieben. Ich liste stichwortartig einige repräsentative Resultate auf; in Klammern sind die jeweils relevanten geometrischen oder topologischen Eigenschaften von M angegeben, wo immer dies sinnvoll ist:

(a1) Ungleichungen von Faber-Krahn [31, 54] (Volumen), Hayman [44, 75] (Inradius) und Cheeger [19] (‚Halbierbarkeit') für λ_1, Beweis der Knotenlinienvermutung für u_2 auf konvexen ebenen Gebieten [61] und Widerlegung im mehrfach zusammenhängenden Fall [45, 33],

(a2) Weyl-Asymptotik für die Eigenwerte [84, 57, 3, 47], Spurformel und daraus Verschärfung der Weyl-Asymptotik (Dynamik des geodätischen Flusses) [18, 30], L^p-Abschätzungen für Eigenfunktionen [83, 38, 82, 39], Verbesserung der generischen Schranke für Eigenfunktionen im arithmetischen Fall [49], Abschätzungen für die Fläche der Knotenmenge [6, 28, 29] und die Dimension der kritischen Menge [43];

zum inversen Spektralproblem: Konstruktion der Wärme-Invarianten (Krümmungsintegrale über M) [68, 36] und der Wellen-Invarianten (Krümmungsintegrale entlang Geodäten) [24, 42], Kompaktheit isospektraler Mengen [7, 64, 74], spektrale Bestimmtheit generischer analytisch berandeter achsensymmetrischer Gebiete [86], Gegenbeispiel zur spektralen Bestimmtheit ebener Gebiete [37],

(b) der Atiyah-Singer Indexsatz (charakteristische Klassen) [2] und (im Fall mit

Rand) der Atiyah-Patodi-Singer Indexsatz [1], und deren ‚Wärmeleitungsbeweise' [34, 67].

Es sei erwähnt, daß es besonders in den Bereichen (a1) und (a2) noch viele offene Probleme gibt, z.B. die spektrale Bestimmtheit konvexer Gebiete, die Knotenlinienvermutung für einfach zusammenhängende Gebiete und die qualitativen Eigenschaften der Eigenfunktionen hoher Energie bei chaotischem geodätischem Fluß (‚Quantenchaos').

Bis hierher wurden nur kompakte Mannigfaltigkeiten (die insbesondere glatt sind) betrachtet. Natürliche Verallgemeinerungen erhält man auf verschiedene Weisen: Durch Abschwächen einer der Forderungen nach Kompaktheit oder Glattheit des Raumes, oder durch Betrachtung parameterabhängiger Familien glatter kompakter (oder allgemeinerer) Räume, die bei Annäherung an gewisse Parameterwerte ‚degenerieren'.

Wichtige Klassen nicht-glatter Räume sind:

(A) Algebraische Varietäten (oder allgemeiner subanalytische Mengen)

(B) Orbiträume eigentlicher Gruppenoperationen auf glatten Mannigfaltigkeiten.

Bezüglich der Begriffe der Riemannschen Metrik und der Differentialoperatoren auf einem solchen Raum nehme ich in dieser Arbeit den Standpunkt ein, daß diese nur auf dem glatten Teil des Raumes definiert sein sollen. Dies ist eine offene, dichte Teilmenge und selbst eine (im Allgemeinen nicht kompakte) Mannigfaltigkeit. Die Idee dabei ist, daß die singuläre Menge (d.h. das Komplement des glatten Teils) für die Analysis durch die Form der Metrik nahe der singulären Menge ‚sichtbar' wird. (Ein anderer Standpunkt wird in [79] vertreten.) Eine natürliche Klasse Riemannscher Metriken ergibt sich im Fall (A) durch Einbettung der Varietät in eine Mannigfaltigkeit N und Rückzug einer glatten Metrik auf N und im Fall (B) aus dem Quotienten einer invarianten Metrik auf dem Totalraum. Diese Metriken sind nicht vollständig, wenn der betrachtete Raum wirklich singulär ist. Von manchen Autoren wird der Standpunkt vertreten, daß man stattdessen nur vollständige Metriken betrachten sollte, da dann gewisse analytische Schwierigkeiten vermieden werden (s. etwa [67]; man beachte, daß jede Metrik zu einer vollständigen konform ist, so daß diese Probleme eng verwandt sind).

Wichtige Beispiele degenerierender Familien glatter kompakter Mannigfaltigkeiten sind:

(C) (‚Adiabatischer Limes') Eine Faserung $\pi : M \to N$ mit glatter Basis und Faser mit Metriken der Form $g_\varepsilon = \pi^* h + \varepsilon g_0$, $\varepsilon > 0$, wobei h, g_0 Metriken auf N bzw. M sind; für $\varepsilon \to 0$ werden die Fasern ‚zusammengezogen'.

(D) Die Menge der beschränkten konvexen Gebiete in $\mathbb{R}^2$. (Der Parameterraum ist unendlich-dimensional; die wichtigste Degenerierung ist: Exzentrizität := Durchmesser/Inradius $\to \infty$.)

Typisches Merkmal der Differentialoperatoren in allen diesen Beispielen nichtglatter und degenerierender Räume ist, daß sie nicht gleichmäßig elliptisch sind oder gewisse Koeffizienten gegen unendlich streben, sobald man sich auf dem glatten Teil des Raumes (bzw. im Parameterraum) der singulären Menge nähert. Daher fasse ich diese Probleme unter dem Begriff ‚singuläre Probleme‘ zusammen.

Eine wichtige Gemeinsamkeit der Beispiele (A)-(C) ist deren starke *Strukturierung*: Sie sind dem glatten kompakten Fall insofern nahe verwandt, als sie durch gewisse lokal endliche Prozesse (z.B. Auflösung von Singularitäten) mit diesem in Verbindung gebracht werden können. Insbesondere sind die Räume stratifiziert. Stratifizierbarkeit ist jedoch eine wesentlich schwächere Bedingung. Es würde den Rahmen dieser Übersicht sprengen, diesen vagen Begriff starker Strukturierung zu präzisieren. Ein Ansatz wurde von R. Melrose mit dem Begriff der ‚boundary fibration structures‘ gegeben [65, 63] (s. auch [G3]). Ein typisches Merkmal derartiger Probleme ist die Existenz vollständiger asymptotischer Entwicklungen der gegebenen und der gesuchten Größen (z.B. in Termen des Abstands zur singulären Menge). Dementsprechend liegt es nahe, die ähnlich stark strukturierte Theorie der Pseudodifferentialoperatoren für solche Probleme anzupassen und zu verwenden.

In Gegensatz dazu ist Beispiel (D) nur schwach strukturiert, ebenso wie die bisher nicht erwähnten Klassen singulärer Räume, die durch geringe Regularitätsforderungen charakterisiert sind (etwa Lipschitz-Mannigfaltigkeiten). Statt vollständiger Asymptotiken kann man hier im Allgemeinen nur Abschätzungen von Größenordnungen erwarten; dies spiegelt sich auch in den verwendeten Techniken (z.B. Maximumsprinzip, Konvexität) wieder.

Singuläre Probleme wurden verstärkt erst seit den 1970er Jahren untersucht, und die Theorie ist weit weniger ausgereift als im glatten kompakten Fall. Zum Beispiel sind selbst die grundlegenden analytischen Fragen, etwa nach Selbstadjungiertheit oder Diskretheit des Spektrums, für viele singuläre Räume noch ungeklärt (siehe hierzu [40, 11]). Die Cheeger-Goresky-MacPherson-Vermutung [23], daß für komplexe projektive Varietäten die L^2-Kohomologie (analytisch definiert, bezüglich einer induzierten Kähler-Metrik) mit der topologisch definierten Schnitthomologie übereinstimme, bildete die treibende Kraft für viele Arbeiten. Siehe [48, 71, 73, 78, 85] für Teilresultate und [81] für den Fall von Orbiträumen; die allgemeine Vermutung ist noch unbewiesen. Eng damit verwandt ist die Frage nach einer Verallgemeinerung des Hodge-Theorems [20, 21, 72, 12, 76, 40]; für allgemeine Varietäten ist dieses Problem ebenfalls noch offen. Als kleines Juwel sei hier noch erwähnt, daß die Analyse der Hodge-Theorie einer Faserung unter der Degenerierung des adiabatischen

Limes auf die Leraysche Spektralsequenz führt [60].

Die einfachsten Singularitäten sind Kegel und Hörner, d.h. lokal von der Gestalt $[0, 1) \times N / \{0\} \times N$, mit Metrik $dx^2 + x^{2\alpha} g_N$ auf dem glatten Teil $(0, 1) \times N$, wobei (N, g_N) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\alpha \geq 1$ ist. Für diesen Fall sind viele der eingangs erwähnten analytischen Eigenschaften ausführlich untersucht worden; zum Teil werden dabei auch Räume zugelassen, die lokal iterierte Kegel oder Produkte $\mathbb{R}^k \times$ Kegel sind (siehe [20, 21, 14, 16, 12, 55, 35, 69] und [22, 15, 32, 8, 56, 17] für Indexsätze).

Wie bereits oben erwähnt, ist es sinnvoll, für stark strukturierte singuläre Probleme Pseudodifferentialkalküle zu entwickeln. Dieses Ziel wurde und wird systematisch von den Schulen um Schulze [80] und Melrose [63] (s. auch [G3]) verfolgt. Pseudodifferentialkalküle existieren insbesondere für den Fall von Kegeln und für den adiabatischen Limes.

Auf singulären Räumen, die nicht lokal kegel- oder hornartig sind, wurden bisher die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators kaum betrachtet; siehe jedoch [41] für semialgebraische Mengen und [9, 10] für Orbiträume, und z.B. [27, 4] für gewisse schwach strukturierte Situationen. Auch Verallgemeinerungen des Indexsatzes sind für komplexere Singularitäten nicht bekannt (für gewisse Klassen von Orbiträumen siehe [53] und [58]). Ein Grund hierfür ist, daß selbst über die lokale Geometrie induzierter Metriken viele grundlegende Fragen ungeklärt sind (vgl. aber die wichtigen Arbeiten [70, 77])

Das Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen ist für zahlreiche Formen der Degenerierung untersucht worden, da solche Probleme oft in Anwendungen auftreten (z.B. Schwingungen dünner Bleche), siehe z.B. [59]. Die hierbei häufig verwendete Methode der zusammengesetzten asymptotischen Entwicklungen ist eng verwandt mit der Konstruktion angepaßter Pseudodifferentialkalküle (siehe [G3]), meist jedoch einfacher (und mit schwächeren, jedoch für den jeweiligen Zweck oft ausreichenden, Resultaten).

Ich erläutere nun kurz, wie die hier eingereichten Arbeiten in das oben skizzierte Umfeld passen. Ausführliche Zusammenfassungen werden im nächsten Kapitel und in den Einleitungen der einzelnen Arbeiten gegeben. In den Arbeiten [GJ1], [GJ2] werden niedrige Eigenwerte des (Dirichlet) Laplace-Operators auf konvexen ebenen Gebieten und die zugehörigen Eigenfunktionen untersucht; dabei sollen die quantitativen Aussagen in der Größenordnung optimal sein, gleichmäßig für Gebiete beliebig hoher Exzentrizität. Dies ist ein schwach strukturiertes Degenerations-Problem.

In den Arbeiten [G1], [G2] untersuche ich die lokale Geometrie singulärer reell (sub-)analytischer Flächen mit isolierten Singularitäten und ziehe daraus Folgerungen über grundlegende analytische Eigenschaften der geometrischen Operatoren.

Diese Arbeiten sind vorwiegend geometrischer Natur.

In [G3], [GG] werden allgemeine Techniken der singulären Analysis, die in stark strukturierten Problemen Verwendung finden, vorgestellt und diskutiert.

Die Arbeiten [CGIKO] und [CGK] behandeln ein Optimierungsproblem für Eigenwerte: Der erste Eigenwert wird über eine Familie von Konfigurationen minimiert, und die qualitativen Eigenschaften der Lösungen werden untersucht. Das Problem ist zunächst nicht singulär im oben beschriebenen Sinn, jedoch enthält es ein freies Randwertproblem, dessen Lösungen im Allgemeinen nicht glatt sind. Weiterhin werden für den zentralen Beweis der Symmetriebrechung gewisse degenerierende Familien von Gebieten (dünne Kreisringe und Hantelgebiete mit schmalem Verbindungskanal) analysiert.

Danksagung. Ich danke Professor Matthias Lesch und Professor Jochen Brüning für ihre Unterstützung während meiner Zeit in Berlin und für ihre Anregungen in bezug auf diese Arbeit. Den anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, Markus Pflaum, Xiaonan Ma, Michael Gruber, Juan Gil und Jürgen Tolksdorf, danke ich für viele interessante Unterhaltungen zu diesen und anderen Themen. Den Koautoren danke ich für die angenehme Zusammenarbeit. Professor Richard Melrose sei Dank für sein kontinuierliches Interesse und die Bereitschaft, seine Einsichten mit anderen zu teilen.

Zusammenfassung der eingereichten Arbeiten

1 Die Arbeiten [GJ1],[GJ2]

1.1 Problemstellung und ältere Resultate

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes Gebiet. Seien $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ die zwei niedrigsten Eigenwerte des Laplace-Operators auf Ω mit Dirichlet Randbedingungen, und seien u_1, u_2 zugehörige Eigenfunktionen. Das Ziel ist, $\lambda_{1/2}$ und $u_{1/2}$ möglichst genau durch geometrische Daten von Ω zu beschreiben. Dabei sollen die Abschätzungen in der Größenordnung bestmöglich sein, gleichmäßig für Gebiete beliebig großer Exzentrizität. (Die Exzentrizität ist definiert als das Verhältnis von Durchmesser zu Inkreisdurchmesser.)

Bevor wir dies präzisieren, normalisieren wir Ω. Das Problem ist invariant unter Streckungen und Bewegungen. Daher können wir annehmen:

Normalisierung:

1. Die Projektion von Ω auf die y-Achse ist das Intervall $(0, 1)$, und die Projektion von Ω auf eine beliebige andere Gerade hat Länge ≥ 1.
2. Die Projektion von Ω auf die x-Achse ist das Intervall $(0, N)$, für ein $N = N(\Omega) \geq 1$.

Siehe Figure 1 in [GJ2] (mit $a = 0, b = N$). Man sieht leicht, daß

$$\text{inradius}(\Omega) = \frac{1}{2} + O(N^{-2}) \tag{1}$$
$$\text{diam}(\Omega) = N + O(N^{-1}). \tag{2}$$

also ist N in etwa die Exzentrizität. Die Eigenfunktionen normalisieren wir so:

$$u_1 > 0, \quad \max_\Omega u_1 = 1,$$
$$\max_\Omega |u_2| = 1.$$

Folgende Tatsachen sind wohlbekannt:

1. u_1, u_2 sind reell-analytische Funktionen im Innern von Ω.

2. Die Niveaumengen $\{u_1 \geq c\}$ sind konvex für jedes c. Insbesondere (wegen 1.) nimmt u_1 sein Maximum an genau einem Punkt an:

$$u_1^{-1}(1) =: \{(x_{\max}, y_{\max})\}.$$

3. Die *Knotenlinie*

$$\mathcal{N} := u_2^{-1}(0)$$

ist reell analytisch, und sie teilt Ω in zwei Zusammenhangskomponenten. (Dies gilt für jede zweite Eigenfunktion, falls die Multiplizität von λ_2 größer als eins ist. In dem hier interessierenden Fall, wo N groß ist, ist die Multplizität jedoch eins, siehe Theorem 1.3 unten.)

Sei $\mathcal{C}$ die Menge der wie oben normalisierten Gebiete Ω. Für $\Omega \in \mathcal{C}$ und $x \in (0, N)$ setze

$$J_x = \{y : \ (x, y) \in \Omega\}$$

und definiere Funktionen $f_1, f_2, h : (0, N) \to (0, 1]$ durch

$$J_x = (f_1(x), f_2(x)), \quad h = f_2 - f_1.$$

$h(x)$ ist die ‚Dicke' von Ω an der Stelle x. h ist eine konkave Funktion. Weiterhin definiert Ω einen gewöhnlichen Differentialoperator

$$\mathcal{L} := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\pi^2}{h(x)^2}$$

auf $(0, N)$, mit Dirichlet Randbedingungen. Seien

$$\mu_1, \mu_2$$

die niedrigsten Eigenwerte von $\mathcal{L}$ und ϕ_1, ϕ_2 zugehörige Eigenfunktionen, normalisiert durch

$$\phi_1 > 0, \quad \max \phi_1 = 1,$$

$$\max |\phi_2| = 1,$$

und seien $\xi_{\max}, \xi_{\text{nod}} \in (0, N)$ definiert durch

$$\phi_1^{-1}(1) = \{\xi_{\max}\},$$

$$\phi_2^{-1}(0) = \{\xi_{\text{nod}}\}.$$

Daß diese beiden Mengen einelementig sind, folgt sofort aus der Konvexität und Positivität des Potentials π^2/h^2.

Definition 1.1 *Sei $l \in \{0,1,2\}$. Eine* Größe l'ter Ordnung *ist eine Funktion $F: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ derart, daß $F(\Omega)$ durch Lösen einer Differentialgleichung in l Variablen elementar bestimmt werden kann. Die Daten der Gleichung (d.h. Koeffizienten, Definitionsbereich) müssen dabei direkt durch Ω bestimmt sein.*

Eine Größe nullter Ordnung heißt auch geometrische Größe. Da diese Definition nur der Formulierung der Problemstellung dient, präzisieren wir die Begriffe ‚elementar' und ‚direkt' nicht, sondern begnügen uns mit den hier relevanten Beispielen:

Beispiele

- Größen *zweiter* Ordnung sind: $\lambda_{1/2}$, $x_{\max}, y_{\max}$, $\|u_{1/2}\|_2$ (die L^2-Norm), die Länge der Knotenlinie von u_2.
- Größen *erster* Ordnung sind: $\mu_{1/2}$, $\xi_{\max}$, ξ_{nod}.
- Größen *nullter* Ordnung sind: $\text{vol}\,(\Omega)$, N.

(Oben haben wir angenommen, daß λ_2 einfach ist.) Damit können wir unser Problem folgendermaßen präzisieren und verallgemeinern:

Hauptproblem:

Bestimme, wie gut sich die oben genannten Größen zweiter Ordnung durch Größen erster und nullter Ordnung approximieren lassen.

Zur Illustration betrachten wir λ_1: Da Ω in einem $N \times 1$-Rechteck enthalten ist, gilt

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1([0,N] \times [0,1]) = \pi^2(1 + N^{-2}). \tag{3}$$

Das legt die Frage nahe, ob auch eine Abschätzung der Form $\lambda_1 \leq \pi^2(1 + CN^{-2})$ gelten kann, für eine Konstante C. Dies ist jedoch nicht der Fall: Im Falle eines Kreissektors

$$\Omega = K_N := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : \ r \in (0,N),\, \sin\theta \in (0, N^{-1})\}$$

kann man die Eigenfunktionen in Termen von Besselfunktionen ausdrücken, und deren bekanntes asymptotisches Verhalten zeigt

$$\lambda_1(K_N) \sim \pi^2(1 + c_0 N^{-2/3})$$

für $N \to \infty$ (siehe [51]).

D. Jerison hat in [51] eine geometrische Größe angegeben, mit deren Hilfe eine bessere Approximation als (3) für λ_1 (und λ_2) gegeben werden kann:

Für $\Omega \in \mathcal{C}$ sei L die Länge des längsten Intervalls $I \subset (0, N)$ mit

$$h \geq 1 - \frac{1}{L^2} \quad \text{auf } I. \tag{4}$$

Es ist einfach zu sehen (siehe [50]), daß

$$\frac{1}{2} N^{1/3} \leq L \leq N,$$

insbesondere ist großes L gleichbedeutend mit großer Exzentrizität. Für den Kreissektor K_N ist $L \sim N^{1/3}$ und für das $N \times 1$-Rechteck ist $L = N$.

Die Lösung des Hauptproblems für $\lambda_{1/2}$ wurde von Jerison gegeben:

Theorem 1.2 ([50],[51]) *Es gibt positiven Konstanten c, C, so daß für alle $\Omega \in \mathcal{C}$ und $i = 1, 2$ gilt:*

$$\begin{gathered} \pi^2 + cL^{-2} \leq \lambda_i \leq \pi^2 + CL^{-2} \\ |\lambda_i - \mu_i| \leq CL^{-3}. \end{gathered} \tag{5}$$

Mit anderen Worten, λ_i läßt sich durch Größen nullter Ordnung mit dem Fehler L^{-2} approximieren und durch Größen erster Ordnung mit dem Fehler L^{-3}.

Das zweite Hauptresultat in [51], zusammen mit Resultaten aus [50], betrifft die Knotenlinie:

Theorem 1.3 ([51]) *Es gibt eine Konstante C, so daß für alle $\Omega \in \mathcal{C}$ mit $L > C$ der zweite Eigenwert einfach ist und die Knotenlinie $\mathcal{N}$ folgende Eigenschaften hat:*

(a) $\overline{\mathcal{N}} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

(b) Sei $\mathcal{N}_x$ die Projektion von $\mathcal{N}$ auf die x-Achse. Dann gilt

$$\mathcal{N}_x \subset [\alpha - CL, \beta + CL],$$

wobei $I = [\alpha, \beta]$ das Intervall in (4) ist.

(c) Es gilt sogar

$$\mathcal{N}_x \subset [\xi_{\text{nod}} - C, \xi_{\text{nod}} + C].$$

(a) löst das ‚Knotenlinienproblem' für den Fall großer Exzentrizität. Dies besteht in der Vermutung, daß die Knotenlinie einer beliebigen zweiten Eigenfunktion den Rand berührt, für beliebige konvexe (oder sogar beliebige einfach zusammenhängende) Gebiete. Sie wurde kurz darauf im konvexen Fall von Melas [62] allgemein gezeigt. M. und T. Hoffmann-Ostenhof und N. Nadirashvili [46] gaben ein Beispiel an, das zeigt, daß diese Vermutung für mehrfach zusammenhängende Gebiete im allgemeinen nicht stimmt.

(b) und (c) zeigen, wie gut die Lage von $\mathcal{N}$ durch Größen nullter bzw. erster Ordnung approximiert werden kann. Die Größenordnung des Fehlers in (c) ist optimal, d.h. C kann hier nicht durch $CF(L)$ ersetzt werden für eine Funktion F, die für $L \to \infty$ gegen Null strebt. Dies folgt aus der Analyse des folgenden Beispiels, die wir kurz skizzieren:

Für ein festes $\varepsilon \in (0,1]$ und beliebiges $N > 1$ sei

$$\Omega_1(N) = \{(x,y):\ 0 < y < \min\{x/\varepsilon, 1\},\ 0 < x < N\}.$$

Dies ist ein rechtwinkliges Dreieck (über $0 < x < \varepsilon$), an das ein $(N-\varepsilon)\times 1$-Rechteck rechts angeklebt ist. Definiere $\Omega_2(N)$ als die Symmetrisierung von $\Omega_1(N)$ um die Gerade $y = 1/2$. Die Gebiete $\Omega_1(N)$ und $\Omega_2(N)$ haben dann dieselbe Funktion h und daher auch dieselbe Funktion ϕ_1 und daher dasselbe ξ_{nod}. Insbesondere ist $h(x) = 1$ für $x \geq \varepsilon$. Man kann nun zeigen, daß die zweite Eigenfunktion u_2 auf einem Gebiet $\Omega \in \mathcal{C}$, das diese letzte Eigenschaft hat, für $x \geq N/10$ sehr nahe (exponentiell in N) bei der Funktion

$$\sin 2\pi \frac{x-\gamma}{N-\gamma} \sin \pi y,$$

der zweiten Eigenfunktion des Rechtecks $(\gamma, N) \times (0,1)$, liegt, wobei $\gamma \in [0,1)$ eine gewisse spektrale Invariante des ‚Endstücks' $\Omega \cap \{0 < x < \varepsilon\}$ ist; daher liegt $\mathcal{N}_x$ sehr nahe (gleichmäßig in ε) dem Punkt $(N+\gamma)/2$. Weiterhin kann man zeigen, daß, zumindest für kleine ϵ, der Wert von γ für die beiden Gebiete $\Omega_1(N)$ und $\Omega_2(N)$ verschieden ist. Daraus folgt sofort, daß ein $c > 0$ existiert, so daß die Knotenlinien von $\Omega_1(N)$ und $\Omega_2(N)$ für großes N Abstand mindestens c haben. Das zeigt die Optimalität der Abschätzung (c).

1.2 Resultate

Die Hauptresultate von [GJ1] lauten:

Theorem 1.4 ([GJ1]) *Es gibt eine Konstante C, so daß für alle $\Omega \in \mathcal{C}$ die Projektion $\mathcal{N}_x$ der Knotenlinie auf die x-Achse ein Intervall der Länge höchstens CL^{-3} ist.*

In dem Fall, daß die Ableitung von h nahe $\mathcal{N}_x$ wesentlich kleiner als L^{-3} ist, erhalten wir sogar eine genauere Abschätzung, siehe Theorem 3 in [GJ1].

Man beachte, daß diese Abschätzung für die ‚Breite' von $\mathcal{N}$ besser ist als die, die aus Satz 1.3(c) folgt. Im Unterschied zu letzterer wird hier allerdings die Position von $\mathcal{N}_x$ nicht mit Hilfe einer Größe niedrigerer Ordnung angegeben.

Wir zeigen auch eine entsprechende punktweise Abschätzung für die Steigung von $\mathcal{N}$:

Theorem 1.5 ([GJ1]) *Sei (η_1, η_2) ein Einheitstangentialvektor an $\mathcal{N}$ im Punkte (x, y). Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $C = C(\varepsilon)$ derart, daß für alle $(x, y) \in \mathcal{N}$ mit Abstand größer als ε von $\partial\Omega$ gilt:*

$$|\eta_1| \leq CL^{-3}.$$

Beide Resultate sind optimal: Im Fall des Kreissektors ist $\mathcal{N}$ ein Kreisbogen, dessen Radius von der Ordnung N ist, daher hat die Breite der Projektion auf die x-Achse die Ordnung $N^{-1} = L^{-3}$. Wir vermuten, daß in Theorem 1.5 die Abschätzung bis zum Rand gilt, d.h. daß C unabhängig von ε gewählt werden kann.

Thema von [GJ2] ist die erste Eigenfunktion. Wir betrachten zunächst die Lage des Maximums:

Theorem 1.6 ([GJ2]) *Es gibt eine Konstante C, so daß für alle $\Omega \in \mathcal{C}$ gilt:*

$$|x_{\max} - \xi_{\max}| \leq C.$$

Dies entspricht Theorem 1.3(c), ist jedoch schwieriger zu beweisen, s. weiter unten. Dasselbe Beispiel wie oben zeigt, daß diese Abschätzung scharf ist. Das Analogon zu Theorem 1.3(b) gilt auch, ist allerdings vergleichsweise einfach zu zeigen, siehe unten.

Das zweite Hauptresultat von [GJ2] gibt an, wie gut sich u_1 mit Hilfe von ϕ_1 gleichmäßig approximieren läßt: Definiere

$$\alpha(x, y) = \pi \frac{y - f_1(x)}{h(x)}.$$

Theorem 1.7 ([GJ2]) *Es gibt eine Konstante C, so daß für alle $\Omega \in \mathcal{C}$ gilt:*

$$|u_1(x, y) - \phi_1(x) \sin \alpha(x, y)| \leq CL^{-1} \quad \text{für } x \in I'.$$

Hierbei ist I' das mit I konzentrische Intervall halber Länge.

Beachte, daß der hier auftauchende Sinus-Faktor für festes x gerade die erste Dirichlet-Eigenfunktion von d^2/dy^2 auf dem y-Intervall J_x ist.

1.3 Methoden, Beweisidee

Die grundlegende Idee ist, wie schon in [51], daß für große Exzentrizität eine angenäherte Trennung der Variablen auftreten sollte. Das bedeutet, daß sich die Eigenfunktion u (d.h. u_1 oder u_2) gut durch eine Funktion der Form

$$\tilde{u}(x, y) = e(x, y)\psi(x)$$

approximieren lassen sollte, wobei $e(x, \cdot)$ die L^2-normalisierte erste Eigenfunktion von d^2/dy^2 auf dem y-Intervall J_x ist. Da der erste Eigenwert dieses Operators $-\pi^2/h(x)^2$ ist und die Spektrallücke $\mu_2 - \mu_1$ für $N \to \infty$ gegen Null strebt (vgl. (5)), erwartet man, daß ein guter Kandidat für ψ gerade ϕ_1 bzw. ϕ_2 ist. Diesen Ansatz verwendete Jerison in [51].

Die wesentliche neue Idee in [GJ1] und [GJ2] ist es, für ψ folgende Funktion zu verwenden:

$$\psi(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} e(x, y)u(x, y)\, dy.$$

Das heißt, $\psi(x)$ ist der Koeffizient des Terms niedrigster Frequenz in der Fourierzerlegung von $u(x, \cdot)$ auf dem Intervall J_x. Insbesondere ist $\psi(x)$ keine Größe erster Ordnung mehr, sondern aus der Eigenfunktion u selbst berechnet. Daher kann man erwarten, dass ψ eine recht gute Approximation $\tilde{u}$ von u liefert, jedenfalls eine bessere als ϕ_1 bzw. ϕ_2.

Andererseits ist die Analyse von ψ schwieriger als die von ϕ_1 bzw. ϕ_2. Daß sie dennoch gelingt, basiert darauf, daß man für ψ eine Gleichung

$$\mathcal{L}\psi = \lambda\psi + \sigma$$

($\lambda = \lambda_1$ bzw. λ_2) herleiten kann, wobei der Term σ von der x-Abhängigkeit von e herrührt (insbesondere ist $\sigma(x) = 0$, falls $\partial_x e \equiv 0$ nahe x). Nahe dem zentralen Intervall I ist $\partial_x e$ beschränkt durch die Steigung der Randkurven $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ von Ω, und diese ist bei hoher Exzentrizität dort sehr klein (z.B. von der Ordnung L^{-3} nahe $\mathcal{N}$). Zusammen mit schwachen a priori-Abschätzungen für u erhält man so optimale Schranken für σ, die eine Analyse von ψ ermöglichen.

Im Fall der zweiten Eigenfunktion zeigt man so, daß ψ genau eine Nullstelle hat, so daß die Nullstellenmenge von $\tilde{u}$ genau aus einer vertikalen Linie besteht. Theorem 1.4 ergibt sich dann aus einer oberen Abschätzung für den Fehler $u - \tilde{u}$ und einer unteren Abschätzung für die Ableitung von ψ nahe dieser Nullstelle.

Im Fall der ersten Eigenfunktion braucht man noch zusätzlich Abschätzungen für die Differenz von ψ und ϕ_1 (nach geeigneter Skalierung). Die Argumentation zum Beweis von Theorem 1.6 ist notwendig komplizierter als die im Beweis von

Theorem 1.3(c), weil die Ableitung der ersten Eigenfunktion (von $\mathcal{L}$) beim Maximum verschwindet (und daher der Ort des Maximums schwieriger zu lokalisieren ist), während die Ableitung der zweiten Eigenfunktion bei ihrer Nullstelle von der Größenordnung L^{-1} ist.

Allgemeine Techniken, die durchgehend in den Arbeiten verwendet werden, sind: Das verallgemeinerte Maximumsprinzip und die verallgemeinerte Harnack-Ungleichung (‚verallgemeinert' bedeutet hier, daß die entsprechenden Sätze für Eigenfunktionen statt harmonische Funktionen verwendet werden), und Carlesons Lemma, das es erlaubt, die Eigenfunktion gleichmäßig nahe dem Rand abzuschätzen. Siehe [51].

Für weitere Details sei auf die Einleitungen und die Hauptteile der Arbeiten [GJ1], [GJ2] verwiesen. Zur Illustration skizzieren wir hier nur den Beweis des folgenden Resultates (vgl. Proposition A' in [51], deren Beweis dort dem Leser überlassen wird):

Proposition 1.8 *Es gibt eine Konstante C, so daß für alle $\Omega \in \mathcal{C}$ gilt:*

$$x_{\max} \in [\alpha - CL, \beta + CL],$$

wobei $I = [\alpha, \beta]$ das Intervall in (4) *ist.*

Beweis (Skizze) Aus der Normalisierung von Ω folgt leicht mit Hilfe einer elementaren geometrischen Überlegung (vgl. Lemma 3.1 in [GJ2]), daß $\max h = 1$ ist. Sei $x_0 \in I$ irgendein Punkt mit $h(x_0) = 1$. Weil nach Definition von I die Ungleichung $h(x) < 1 - L^{-2}$ für $x \notin I$ gilt, folgt aus der Konkavität von h und $|I| = L$ sofort $|h'(x)| > L^{-3}$ für $x \notin I$. Daher gilt $h(x) \leq 1 - |x - x_0| L^{-3}$ für $x \notin I$. Aus der zweiten Ungleichung in (5) folgt dann, daß es eine Konstante C_0 gibt, so daß für alle $\Omega \in \mathcal{C}$ gilt:

$$\frac{\pi^2}{h(x)^2} - \lambda_1 > \frac{1}{L^2} \quad \text{für } |x - x_0| > C_0 L. \tag{6}$$

Um $x_{\max}$ zu lokalisieren, wollen wir $u = u_1$ weit weg von I nach oben abschätzen. Dazu betrachten wir zunächst die Funktion

$$\rho(x) = \int_{I_x} u(x,y)^2 \, dy, \quad x \in (0, N).$$

Man berechnet nun leicht (alle Integrale erstrecken sich über I_x mit dem Maß dy, und $u_x = \partial_x u$ etc.)

$$\rho'' = 2\left(\int u u_{xx} + \int u_x^2\right) \tag{7}$$
$$\geq 2\int u u_{xx} = 2\int u(-u_{yy} - \lambda_1 u) \tag{8}$$
$$= 2\int u_y^2 - 2\lambda_1 \int u^2 \tag{9}$$
$$\geq 2(\frac{\pi^2}{h^2} - \lambda_1)\rho. \tag{10}$$

Hierbei wurde in der dritten Zeile partiell in y integriert und in der vierten Zeile verwendet, daß $\pi^2/h(x)^2$ der erste Eigenwert auf I_x ist und dieser durch den Rayleigh-Quotienten charakterisiert werden kann.

Wegen (6) folgt also

$$\rho''(x) \geq 2L^{-2}\rho(x) \quad \text{für } |x - x_0| > C_0 L.$$

Wegen $\max \rho \leq 1$ und $\rho(0) = \rho(N) = 0$ folgt daraus mit Hilfe eines elementaren Vergleichsarguments (der ein-dimensionalen Version des verallgemeinerten Maximumsprinzips), daß

$$\rho(x) \leq e^{-\sqrt{2}\,\mathrm{dist}\,(x, I_0)/L} \tag{11}$$

gilt, wobei $I_0 = [x_0 - C_0 L, x_0 + C_0 L]$.

Schließlich wollen wir u punktweise durch seinen Mittelwert ρ abschätzen. Sei zunächst x derart, daß $h(x) \geq 1/2$, und sei $I = \{x\} \times I_x$ und I' das mit I konzentrische Intervall halber Länge. Das Carleman-Lemma zeigt, daß $\max_I u \leq C \max_{I'} u$, und die Harnack-Ungleichung gibt $\max_{I'} u \leq C \min_{I'} u$, für eine Konstante C. Wegen $\min_{I'} u^2 \leq h(x)^{-1}\rho(x)$ erhält man schließlich

$$\max_y u(x,y)^2 \leq C\rho(x) \quad \text{für } h(x) \geq 1/2.$$

Ein elementares 'barrier argument' (Konstruieren einer Vergleichsfunktion und Verwendung des verallgemeinerten Maximumsprinzips) gibt

$$\max_y u(x,y) \leq CL^{-1} \quad \text{für } h(x) \leq 1/2.$$

(Siehe [GJ2], Lemmas 3.2 und 3.12 für mehr Details bzgl. der letzten beiden Abschätzungen.) Zusammen mit (11) geben diese beiden Abschätzungen

$$u(x,y) < 1 \quad \text{für } x \notin [\alpha - C_1 L, \beta + C_1 L]$$

für eine geeignete Konstante $C_1 > C_0$. Daraus folgt, daß u sein Maximum innerhalb dieses Intervalls annehmen muß. □

2 Die Arbeiten [G1], [G2]

Thema dieser Arbeiten ist die lokale Geometrie sub-analytischer Flächen mit induzierter Metrik, mit Anwendungen auf die Analysis geometrischer Differentialoperatoren auf ihnen.

Sei V eine sub-analytische kompakte Teilmenge einer reell-analytischen Mannigfaltigkeit M. Ich nehme an, daß V überall Dimension zwei und nur isolierte Singularitäten hat. Also gilt

$$V = V_{\text{reg}} \cup \{p_1, \dots , p_k\},$$

wobei $p_1, \dots , p_k$ nicht-isolierte Punkte von V sind und V_{reg} eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

Sei weiterhin eine reell-analytische Riemannsche Metrik auf M gegeben, und sei g die auf V_{reg} induzierte Riemannsche Metrik.

Die ersten beiden Hauptresultate von [G1] geben eine Beschreibung der lokalen Geometrie von V in der Umgebung eines Punktes. Die Riemannsche Metrik auf V_{reg} induziert eine Abstandsfunktion d auf V, die *intrinsische Metrik*. Weiterhin sei dist die von der Riemannschen Metrik auf M induzierte Abstandsfunktion auf M. Eingeschränkt auf V wird dist als *extrinsische Metrik* bezeichnet.

Wichtige Spezialfälle sind die Kegel und Hörner: Sei $\gamma \geq 1$ eine rationale Zahl. Definiere

$$V_\gamma = \{(x, y, z) : \, 0 \leq z < 1, \, z^\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Auf $\mathbb{R}^3$ wird die Euklidische Metrik verwendet. Dann heißt (V_γ, d) für $\gamma = 1$ *Kegel* und für $\gamma > 1$ *Horn*. Weiterhin betrachte man für $\gamma_1, \dots , \gamma_m \geq 1$ rational und $\varepsilon > 0$ die Menge

$$V_{\gamma_1,\dots,\gamma_m} = \bigcup_{i=1}^{m} e_i \otimes V_{\gamma_i} \subset \mathbb{R}^{3m},$$

wobei $e_1, \dots , e_m$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^m$ sind. Versieht man $\mathbb{R}^{3m}$ mit der Euklidischen Metrik, so ist $(V_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}, d)$ als metrischer Raum einfach die Verklebung von $V_{\gamma_1}, \dots , V_{\gamma_m}$ an der Spitze. Alle diese Räume sind semi-algebraisch, also insbesondere sub-analytisch.

Zwei metrische Räume $(X, d), (X', d')$ heißen *quasiisometrisch*, falls es einen Homöomorphismus $\phi : X \to X'$ gibt derart, daß ϕ und ϕ^{-1} Lipschitz-Abbildungen sind.

Im ersten Hauptsatz werden die oben eingeführten Räume lokal modulo Quasiisometrie klassifiziert:

Theorem 2.1 (Theorem 1.1 in [G1]) *Sei (V, d) wie oben und $p \in V$. Dann gibt es eine Umgebung von p in V, die quasi-isometrisch zu einem der Räume $V_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}$ ist.*

Damit dies eine Klassifikation darstellt, muß noch gezeigt werden, daß zwei Räume $V_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}$, $V_{\delta_1,\dots,\delta_n}$ dann und nur dann quasiisometrisch sind, wenn die beiden Multimengen $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ gleich sind. Dies folgt sofort aus einem Resultat in [G2]:

Theorem 2.2 (Corollary 3.10 in [G2]) *Falls $\gamma_1, \gamma_2 \geq 1$ und V_{γ_1} zu V_{γ_2} quasiisometrisch ist, so folgt $\gamma_1 = \gamma_2$.*

Natürlich hat man $m = 1, \gamma_1 = 1$ für $p \in V_{\text{reg}}$. Die Spezialfälle V_γ mit $0 < \gamma < 1$ treten in der Klassifikation nicht explizit auf, da sie quasiisometrisch zum Kegel V_1 sind (siehe Corollary 3.7 in [G2]).

In Theorem 1.2 in [G1] wird die Quasiisometrie aus Theorem 2.1 genauer beschrieben. Insbesondere wird gezeigt, daß die Bogenlängeparametrisierung entlang den Kurven

$$S_r(p) = \{q \in V : \text{dist}\,(q, p) = r\}$$

in natürlicher Weise eine solche Quasiisometrie definiert.

Der zweite geometrische Satz in [G1] betrifft die Länge der Kurven $S_r(p)$:

Theorem 2.3 (Theorem 1.3 in [G1]) *Sei (V, d) wie oben und $p \in V$. Für $r \to 0$ gibt es eine vollständige Asymptotik*

$$\textit{Länge}(S_r(p)) \sim \sum_{i,j} C_{i,j} r^i (\log r)^j, \tag{12}$$

wobei i über eine Menge positiver rationaler Zahlen mit beschränktem Nenner und j über $\{0, 1\}$ variiert.

Weiterhin ist der kleinste vorkommende Exponent i gleich $\gamma = \min\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, wobei $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ wie in Theorem 2.1 bestimmt sind, und $C_{\gamma,1} = 0$; das heißt, der führende Term der Asymptotik enthält keinen Logarithmus.

Die Asymptotik darf gliedweise abgeleitet werden.

Da Zusammenhangskomponenten subanalytischer Mengen wieder subanalytisch sind, gilt dieselbe Aussage für jede Komponente einer punktierten Umgebung von p separat, nicht nur für deren Vereinigung.

Aus diesen geometrischen Resultaten leite ich dann eine Version des Satzes von Gauss-Bonnet her:

Theorem 2.4 (Theorem 1.4 in [G1]) *Sei (V, d) wie oben. Seien $l_1, \dots, l_k$ die Koeffizienten des Terms r in den Asymptotiken (12) für alle singulären Punkte $p_1, \dots, p_k$. Sei K die Gauss-Krümmung der Riemannschen Metrik auf V_{reg}.*

Dann ist K integrierbar über V_{reg}, und für die Euler-Charakteristik gilt

$$\chi(V) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{V_{\mathrm{reg}}} K + \sum_{i=1}^{k}(2\pi - l_i)\right).$$

Schließlich ziehe ich noch Folgerungen analytischer Natur. Es bezeichne $L^2(\bigwedge V_{\mathrm{reg}})$ und d die äußere Ableitung. Man kann d und sein Transponiertes d^t auf Elemente von $L^2(\bigwedge V_{\mathrm{reg}})$ im Sinne der Distributionentheorie anwenden.

Theorem 2.5 (Theorem 1.5 in [G1]) *(i) V_{reg} hat die L^2-Stokes-Eigenschaft; d.h. falls $\omega, \eta, d\omega, d^t\eta \in L^2(\bigwedge V_{\mathrm{reg}})$, dann gilt*

$$(d\omega, \eta) = (\omega, d\eta).$$

(ii) Der Gauss-Bonnet-Operator $D_{GB} = d + d^t$ und der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta = D_{GB}^2$ sind selbstadjungiert als unbeschränkte Operatoren auf $L^2(\bigwedge V_{\mathrm{reg}})$ mit Definitionsbereichen $\mathcal{D}(D_{GB}) = H^1(\bigwedge V_{\mathrm{reg}})$ und $\mathcal{D}(\Delta) = H^2(\bigwedge V_{\mathrm{reg}})$.

Ihre Spektren sind diskret.

(iii) Die L^2-Euler-Charakteristik von V, d.h. der Index des Operators D_{GB}, betrachtet als Operator von den geraden in die ungeraden Formen, ist

$$\chi_2(V) = N + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{V_{\mathrm{reg}}} K - \sum_{i=1}^{k} l_i\right),$$

wobei N die Gesamtzahl aller Kegel und Hörner an allen singulären Punkten von V ist.

Bezüglich der Beweismethoden bemerke ich nur kurz, daß für die Theoreme 2.1 und 2.3 die Auflösung von Singularitäten verwendet wird. Das Problem besteht dann darin, die Form der Metrik auf dem desingularisierten Raum zu bestimmen. Die genaue Analyse zeigt jedoch, daß für die Klassifikation modulo Quasiisometrie eine recht schwache Kenntnis dieser ‚aufgeblasenen' Metrik ausreicht.

Für weitere Details und eine Darstellung verwandter Literatur verweise ich auf die Einleitung von [G1].

Thema von [G2] ist die Untersuchung der Frage, unter welchen Bedingungen zwei Riemannsche Metriken auf punktierten Umgebungen von 0 in $\mathbb{R}^n$ quasiisometrisch sind, bzgl. eines Diffeomorphismus's ϕ, der sich durch $\phi(0) = 0$ als Homöomorphismus fortsetzen läßt (aber bei Null möglicherweise singulär ist). Insbesondere wird (eine Verallgemeinerung von) Theorem 2.2 bewiesen (siehe Theorem 3.8 in [G2]). Es wird auch gezeigt, daß die vom $\mathbb{R}^3$ auf dem reellen ‚Whitney umbrella' $W = \{x^2 = y^2 z\}$ induzierte Metrik zu einer konischen Metrik quasiisometrisch ist, wenn man zur Normalisierung von W übergeht.

3 Die Arbeiten [G3], [GG]

Thema dieser Arbeiten sind allgemeine Techniken der singulären Analysis. [G3] gibt eine ausführliche Einführung in die grundlegenden Ideen und Konzepte von R. Melroses b-Kalkül. In [GG] wird die genaue Beziehung zwischen einem zentralen Satz des b-Kalküls, dem Push-Forward Theorem, und dem Singular Asymptotics Lemma von Brüning und Seeley untersucht.

Der b-Kalkül ist eine Theorie, die den klassischen Kalkül der Pseudodifferentialoperatoren auf gewisse, stark strukturierte singuläre Situationen verallgemeinert. Er wurde von R. Melrose und vielen seiner Koautoren seit den frühen 80er Jahren entwickelt und wird gegenwärtig immer noch weiter ausgebaut. Insofern stellt er auch (noch) keine abgeschlossene Theorie dar, sondern eher eine Sammlung von Ideen und Konzepten, die zur Lösung vieler singulärer Probleme verwendet werden kann und verwendet wurde.

Die allgemeine Klasse singulärer Probleme zu beschreiben, auf die der b-Kalkül anwendbar sein soll (die ‚boundary fibration structures'), würde hier zu weit führen. Stattdessen geben wir drei typische Beispiele an:

Beispielprobleme des b-Kalküls:

1. Resolventenentwicklung: Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit und P ein positiver elliptischer Differentialoperator auf X.[1] Bestimme die Struktur der Resolvente
$$(P + z)^{-1}, \quad z > 0,$$
gleichmäßig für $z \to \infty$.

2. b-Kalkül im engeren Sinn: Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Betrachte einen elliptischen Operator P vom Fuchs-Typ (oder ‚total charakteristischen'Operator) auf X; das heißt, in lokalen Koordinaten $(x, y =$

[1] Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir im Folgenden immer an, daß die Operatoren skalar sind, obwohl dies nirgends wesentlich ist.

$(y_1, \dots, y_{n-1})) : U \subset X \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ nahe einem beliebigen Randpunkt hat P die Gestalt

$$\sum_{j+|\alpha|\leq m} a_{j\alpha}(x,y)(x\partial_x)^j \partial_y^\alpha, \quad a_{j\alpha} \text{ glatt},$$

und $\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j\alpha}(x,y)\lambda^j\eta^\alpha \neq 0$ für $(\lambda,\eta) \neq 0$. Das Problem besteht dann darin, eine Parametrix für P zu konstruieren und deren Struktur zu verstehen, um damit Abbildungs-, insbesondere Fredholmeigenschaften von P zu untersuchen.

3. Adiabatischer Limes: Sei $\pi : M \to Y$ eine Faserung kompakter Mannigfaltigkeiten; seien g und h Riemannsche Metriken auf M bzw. Y. Für $\varepsilon > 0$ betrachte die Metrik $g_\varepsilon = \pi^* h + \varepsilon^2 g$ auf M. Das Problem besteht darin, das Verhalten gewisser Invarianten, die mit Hilfe des zu g_ε assoziierten Laplace-Beltrami-Operators definiert sind, für $\varepsilon \to 0$ zu untersuchen. Siehe [60] für die Hodge-Kohomologie und [26] für die analytische Torsion.

Die ersten beiden Beispiele sind auch von vielen anderen Autoren behandelt worden. Der b-Kalkül gibt jedoch einen einheitlichen Rahmen für derartige Probleme.

Wesentliche Charakteristika des b-Kalküls sind:

1. Operatoren werden durch ihre Schwartz-Kerne beschrieben.
2. Singuläres Verhalten wird so weit wie möglich durch geometrische Konstruktionen (Aufblasen des zugrundeliegenden Raumes) charakterisiert.

Operiert ein Operator auf (Funktionen auf) einem Raum X und hängt von Parametern in einem Raum Z ab, so ist sein Schwartzscher Kern eine Distribution K auf $X \times X \times Z$. Die Struktur eines Operators zu verstehen bedeutet dann, eine Aufblasung $\beta : Y \to X \times X \times Z$ zu finden derart, daß der Rückzug des Schwartzschen Kerns K unter β eine einfache, im wesentlichen durch die Geometrie von Y beschreibbare Struktur hat. (Technisch gesprochen: Y soll eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Ecken sein und $\beta^* K$ soll polyhomogen konormal auf Y sein, insbesondere konormale Singularitäten entlang einer Untermannigfaltigkeit von Y haben, die mit ∂Y normale Kreuzungen hat. Ggf. ist $X \times X \times Z$ vorher zu kompaktifizieren, z.B. durch Hinzufügen von $z = \infty$ im ersten Beispiel.)

Betrachten wir etwa das zweite Beispiel oben: Schwartzsche Kerne von Operatoren auf X sind lokal als Distributionen $K(x, y, x', y')$ mit $x, x' \in \mathbb{R}_+$, $y, y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ausdrückbar; ein wesentlicher Schritt zur Lösung des Problems der Parametrixkonstruktion besteht in der Erkenntnis, daß die Schwartzschen Kerne von Parametrices für P eine recht einfache Struktur bekommen, wenn man sie in Polarkoordinaten bezüglich x, x' zu schreiben versucht. Geometrisch bedeutet das nichts anderes, als die Untermannigfaltigkeit $\partial X \times \partial X$ in $X \times X$ aufzublasen und den Rückzug der Kerne auf diese Aufblasung zu betrachten. Die weitere Parametrixkonstruktion kann dann im Wesentlichen ähnlich wie im klassischen Pseudodifferentialkalkül durchgeführt werden (jedoch muß ein zweites Symbol eingeführt werden, wenn die Fehlerterme in der Parametrixkonstruktion Fredholm sein sollen).

In [G3] werden diese Ideen und Methoden eingeführt und anhand vieler Beispiele motiviert. Eine derartige einführende Darstellung des b-Kalküls war bisher nicht in der Literatur zu finden. Wir heben einige wichtige Aspekte hervor:

1. Ausführliche Diskussion der Problematik von asymptotischen Entwicklungen in mehreren Variablen: Simultane Asymptotik vs. Asymptotik in jeder Variable getrennt. (Abschnitt 2.1)

2. Detaillierte Motivation und Diskussion der Rolle von Aufblasungen (‚blow-ups') in der Beschreibung nicht-simultaner Asymptotik; Begriff des asymptotischen Typs. (Abschnitte 2.2–2.4)

3. Diskussion des Zusammenhangs dieser Begrifflichkeiten mit den Begriffen ‚Regimes' und ‚Kompatibilitätsbedingungen'(matching conditions), die vor allem in der Literatur der angewandten Mathematik verwendet werden. (Abschnitt 2.5)

4. Einführung in den klassischen Pseudodifferentialkalkül. (Abschnitte 3.3, 4.1)

5. Ausführliche Erläuterung der Rolle des Push-Forward Theorems und des Pull-Back-Theorems, und Beweisskizzen. (Abschnitte 3.1, 3.2)

6. Charakterisierung des zentralen Begriffs der b-Faserung (alternativ zu Melrose's ursprünglicher Definition in [66]). (Definition 3.9)

7. Ausführliche Darstellung des b-Kalküls im engeren Sinne (Beispiel 2 oben). (Kapitel 4)

Die Arbeit [GG]: Die Untersuchung der genauen Beziehung zwischen dem Push-Forward-Theorem von Melrose und dem Singular Asymptotics Lemma von Brüning und Seeley zeigt, daß beide dasselbe grundlegende Problem betreffen und es in unterschiedlichen Teilaspekten lösen.

Das Push-Forward-Theorem ist eine weitreichende Verallgemeinerung des Satzes, daß der Push-Forward $f_*\mu$ einer glatten Dichte μ, die auf einer Mannigfaltigkeit X definiert ist, unter einer eigentlichen glatten Abbildung $f : X \to Y$ wieder eine glatte Dichte ist, falls f eine Submersion (und damit eine Faserung) ist. Die Verallgemeinerung besteht in folgenden Punkten:

- X und Y sind Mannigfaltigkeiten mit Ecken, d.h. überall lokal von der Gestalt
$$\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^{n-k} \tag{13}$$
(mit $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$).

- f braucht keine Faserung zu sein, sondern nur die schwächeren Bedingungen an eine *b-Faserung* zu erfüllen. Eine b-Faserung ist im Innern eine Faserung (d.h. f bildet $\mathrm{int}(X)$ auf $\mathrm{int}(Y)$ als Faserung ab), aber nicht notwendig am Rand. Für die genauen Bedingungen an eine b-Faserung siehe [G3], Definition 3.9, oder [66]. Das einfachste nicht-triviale Beispiel ist
$$f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+, \quad (x, y) \mapsto xy. \tag{14}$$

- μ braucht nicht glatt bis an den Rand zu sein, sondern nur ‚polyhomogen konormal', d.h. μ muß vollständige asymptotische Entwicklungen, simultan in allen Randvariablen $x_1, \dots x_k$ nahe Ecken (13), in Termen der Form $\prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i} (\log x_i)^{\beta_i}$ haben.

Das Push-Forward Theorem (PFT) sagt dann, daß auch $f_*\mu$ polyhomogen konormal ist, und berechnet die vorkommenden Exponenten (α_i und β_i) aus denen von μ und aus kombinatorischen Daten über das Randverhalten von f. Z.B. ergibt sich für die Abbildung f in (14) und für μ glatt bis an den Rand von $\mathbb{R}_+^2$, daß in der Asymptotik von $f_*\mu$ im allgemeinen logarithmische Terme vorkommen.

Das Singular Asymptotics Lemma (SAL) von Brüning und Seeley ([13]) behandelt die Frage, wie man die Asymptotik des Integrals
$$\int_0^\infty \sigma(x, xz)\, dx$$
für $z \to \infty$ aus der Kenntnis der Asymptotik von $\sigma(x, \zeta)$ bei $x = 0$ und $\zeta = \infty$ berechnen kann, wenn zusätzlich eine gewisse Integrabilitätsbedingung (nahe $x = \zeta = 0$) erfüllt ist. (Das ‚klassische' SAL aus [13] wurde in [5] verallgemeinert.)

In [GG] zeigen wir, daß das im SAL gestellte Problem als Spezialfall der Problemstellung des PFT betrachtet werden kann. Daher kann man einen Teil der Aussage des SAL aus dem PFT herleiten (nämlich die in der Asymptotik auftretenden Exponenten). In SAL werden allerdings zusätzlich explizite Formeln für die Koeffizienten angegeben. Diese expliziten Formeln wurden bei der Behandlung des Indexproblems auf Räumen mit konischen Singularitäten verwendet (siehe [15]). Außerdem sind die Regularitätsanforderungen im SAL etwas schwächer.

Die Abbildung f, die die Brücke zwischen SAL und PFT schlägt, ist folgendermaßen definiert: Sei $\beta : [\mathbb{R}_+^2, 0] \to \mathbb{R}_+^2$ die Aufblasung von $0 \in \mathbb{R}_+^2$ und $\pi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$

die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist $f = \pi \circ \beta : [\mathbb{R}^2_+, 0] \to \mathbb{R}_+$. Für den Spezialfall, daß σ für ζ nahe Null verschwindet, kann die einfachere Abbildung (14) verwendet werden.

Eine gemeinsame Verallgemeinerung von PFT und SAL bestünde in der Lösung des folgenden Problems:

Problem: Sei $f : X \to Y$ eine eigentliche b-Faserung und μ eine polyhomogen konormale Dichte. Bestimme die Koeffizienten in den Randasymptotiken von $f_*\mu$ in Termen von regularisierten Integralen über die Koeffizienten der Randasymptotiken von μ.

4 Die Arbeiten [CGIKO] und [CGK]

In diesen Arbeiten wird folgendes Optimierungsproblem untersucht:

Problem: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand. Für $\alpha > 0$ und meßbares $D \subset \Omega$ betrachte den Operator

$$P_{\alpha,D} = -\Delta + \alpha\chi_D,$$

wobei Δ den Laplace-Operator und χ_D die charakteristische Funktion von D bezeichnet. Sei $\lambda_\Omega(\alpha, D)$ der erste Eigenwert des Dirichletproblems für $P_{\alpha,D}$.

Es bezeiche $|D|$ das Volumen von D. Sei $0 \leq A \leq |\Omega|$ gegeben.

Man untersuche, für welche Gebiete D mit $|D| = A$ der Eigenwert $\lambda_\Omega(\alpha, D)$ seinen minimalen Wert annimmt.

Solche optimierenden Gebiete D nennen wir *optimale Konfigurationen* oder Lösungen; (u, D) heißt *optimales Paar*, falls D eine optimale Konfiguration und u eine erste Eigenfunktion von $P_{\alpha,D}$ ist. u ist bis auf skalare Vielfache eindeutig durch D bestimmt.

Wir erhalten Resultate zu folgenden Punkten:

- Existenz, Regularität und Eindeutigkeit,
- Abhängigkeit von den Parametern α, A,
- Symmetrieerhaltung und Symmetriebrechung,
- Regularität des Randes einer optimalen Konfiguration,

- Konvexität,
- Zusammenhang,
- Relation mit einem Problem der optimalen Massenverteilung in einer Membran.

Es würde zu weit führen, hier alle Resultate im Einzelnen zu erwähnen. Daher beschränken wir uns, nach einigen grundlegenden Erörterungen, auf die zentralen Themen Symmetrie und Regularität des Randes.

Zunächst zeigen wir:

Theorem 4.1 (Theorem 1 in [CGIKO]) *Eine optimale Konfiguration existiert. Jedes optimale Paar (u, D) besitzt die folgenden Eigenschaften:*

- *Regularität: $u \in C^{1,\delta}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ für beliebiges $\delta < 1$.*
- *Niveaumengeneigenschaft: Es gibt ein $t \geq 0$, so daß*

$$D = \{u \leq t\}. \tag{15}$$

Hierbei identifizieren wir immer Mengen, die sich nur durch eine Nullmenge unterscheiden. Insbesondere kann man wegen (15) annehmen, daß D abgeschlossen ist.

Die Frage der Eindeutigkeit ist weit komplizierter: Wir zeigen, daß für $\Omega = \{x : |x| < 1\}$ eine eindeutige optimale Konfiguration existiert (bei beliebigen Werten der Parameter α, A), während es für gewisse andere Gebiete und gewisse Parameterwerte mehrere Lösungen gibt. Beide Aussagen folgen aus Symmetriebetrachtungen: Die Eindeutigkeit für den Ball folgt sofort aus dem folgenden Satz über *Symmetrieerhaltung bei Konvexität*:

Theorem 4.2 (Theorem 4 in [CGIKO]) *Ω sei symmetrisch und konvex bezüglich einer Hyperebene, etwa $\{x_1 = 0\}$; d.h. für jedes $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ sei die Menge*

$$\{x_1 : (x_1, x') \in \Omega\}$$

entweder leer oder ein Intervall der Form $(-c, c)$.

Dann gilt: Ist (u, D) ein optimales Paar, so sind u und D symmetrisch bezüglich $\{x_1 = 0\}$, das Komplement D^c ist konvex bezüglich $\{x_1 = 0\}$, und u_1 ist monoton fallend in x_1 für $x_1 \geq 0$.

Auf der anderen Seite folgt Nicht-Eindeutigkeit aus *Symmetriebrechung*: Ist Ω etwa spiegelsymmetrisch, eine optimale Konfiguration D aber nicht, so ist auch die Spiegelung von D eine optimale Konfiguration und von D verschieden. Wir zeigen Symmetriebrechung in zwei Situationen: Für Ringgebiete und für Hantelgebiete. Ringgebiete sind rotationssymmetrisch, Hantelgebiete sind symmetrisch bzgl. Spiegelung in den Koordinatenachsen:

Theorem 4.3 (Theorem 6 in [CGIKO]) *Seien $\alpha > 0$ und $\delta \in (0,1)$ gegeben. Für $b > 0$ sei Ω_b der Kreisring der Dicke b,*

$$\Omega_b = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 1 + b\}.$$

Es gibt $b_0 = b_0(\alpha, \delta)$ derart, daß für $b < b_0$ jede optimale Konfiguration mit Parametern α und $A = \delta|\Omega_b|$ nicht rotationssymmetrisch ist.

Siehe Figure 2(b) in [CGIKO].

Theorem 4.4 (Theorem 7 in [CGIKO]) *Für $h \in (0,1)$ definiere das Hantelgebiet mit Verbindungskanal der Breite $2h$*

$$\Omega_h = B_1(-2,0) \cup ((-2,2) \times (-h,h)) \cup B_1(2,0),$$

wobei $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - p| < r\}$ ist. Für jedes $\alpha > 0$ und $A \in (0, 2\pi)$ gibt es ein $h_0 = h_0(\alpha, A)$ derart, daß für alle $h < h_0$ gilt:

(i) Jede optimale Konfiguration D ist unsymmetrisch bezüglich Reflektion an der x_2-Achse.

(ii) Falls $A > \pi$, dann ist für jede optimale Konfiguration D das Komplement D^c in einer der Hanteln $B_1(\pm 2, 0)$ enthalten.

Siehe Figure 3 in [CGIKO]. Für die Beweise dieser beiden Sätze wird verwendet, daß eine Lösung (u, D) den Rayleigh-Quotienten

$$R(u, D) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \alpha \int_D u^2}{\int_\Omega u^2}$$

über alle $u \not\equiv 0$ und D mit $|D| = A$ minimiert. Dann gilt es zu zeigen, daß gewisse unsymmetrische Lösungen einen kleineren Wert $R(u, D)$ haben als jede beliebige symmetrische.

Numerische Berechnungen zeigen, daß in beiden Sätzen die Kleinheit der Parameter (b bzw. h) wesentlich für die Symmetriebrechung ist: Für dicke Ringe oder

Hanteln mit dicker Verbindung sind die (numerisch berechneten) Lösungen symmetrisch (siehe Figure 2 und 3 in [CGIKO]).

Wir wenden uns nun Fragen der *Regularität des ‚freien Randes'* zu. Der freie Rand ist hierbei definiert als

$$\mathcal{F} = \{u = t\},$$

wobei t wie in (15) definiert ist. Man beachte, daß $\partial D \subset \mathcal{F}$, die umgekehrte Inklusion aber a priori nicht klar ist.

Zunächst kann man erwarten, daß für gewisse Gebiete und gewisse Parameterwerte Lösungen D mit nicht-glattem Rand existieren: Variiert man zum Beispiel die Dicke b eines Ringgebietes und betrachtet Lösungen $D = D(b)$ bei festem α und $\delta = A/|\Omega|$, so ändert sich gemäß den (numerischen errechneten) Bildern Figure 2(a) und 2(b) in [CGIKO] der topologische Typ von D bei wachsendem b. Dies legt nahe, daß für einen gewissen Übergangswert $b = b_1$ der Rand keine glatte Kurve ist, sondern etwa aus einer sich selbst kreuzenden Kurve besteht. Dies wurde in der Tat in einer numerischen Rechnung von Imai und Ohnishi bestätigt. (Bei Annahme genügend regulärer Abhängigkeit einer geeigneten Lösung $D(b)$ von b könnte die Existenz von b_1 auch strikt bewiesen werden.)

Zunächst haben wir positive Resultate, die hohe Regularität in gewissen Situationen zeigen:

Theorem 4.5 (Theorem 8 in [CGK]) *Sei (u, D) ein optimales Paar, $x \in \mathcal{F}$ und $\nabla u(x) \neq 0$. Dann ist $\mathcal{F}$ eine reell-analytische Hyperfläche nahe x und stimmt dort mit ∂D überein.*

Das Problem in dem Beweis besteht darin, daß das Potential χ_D bei ∂D unstetig ist, also u dort nicht einmal C^2 Regularität besitzt. Daß die Niveaumenge $\{u = t\}$ dennoch lokal C^ω ist, zeigen wir durch Einführung geeigneter Koordinaten (mit u als einer Koordinatenfunktion) und Analyse der resultierenden nichtlinearen elliptischen Gleichung.

Mit Hilfe eines Störungsarguments und bekannter Eigenschaften der ersten Dirichlet-Eigenfunktion des Laplace-Operators erhalten wir daraus:

Theorem 4.6 (Theorem 9 in [CGIKO]) *Ω sei konvex und habe einen C^2 Rand. Dann gibt es $\alpha_0 = \alpha_0(A, \Omega)$ derart, daß für jede Lösung D mit $\alpha < \alpha_0$ der freie Rand $\mathcal{F}$ eine konvexe und reell analytische Hyperfläche ist und mit ∂D übereinstimmt.*

Das Problem, die singuläre Menge von $\mathcal{F}$ (d.h. die Menge der Punkte $x \in \mathcal{F}$ mit $\nabla u(x) = 0$) im Allgemeinen zu beschreiben, ist sehr kompliziert. Unsere Resultate in dieser Richtung beruhen im Wesentlichen auf dem Hopfschen Lemma, das besagt, daß eine in einem Gebiet G positive superharmonische Funktion, die an einem Randpunkt $x_0 \in \partial G$ verschwindet, dort positive Normalenableitung besitzt, falls ein Ball $B \subset G$ mit $x_0 \in \partial B$ existiert.

Sei im Folgenden (u, D) ein optimales Paar für gegebene Daten Ω, α, A, und sei t wie in (15) bestimmt. Setze

$$D^+ = \{u > t\}, \quad D^- = \{u < t\}.$$

Sei $\Lambda = \Lambda(\alpha, A)$ der zugehörige Eigenwert.

Indem man das Hopfsche Lemma auf $u - t$ bzw. $t - u$ in D^+ bzw. D_- anwendet, erhält man zunächst:

Lemma 4.7 (Lemma 2 in [CGK]) *(a) Sei $x_0 \in \mathcal{F}$. Existiert ein Ball $B \subset D^+$ mit $x_0 \in \partial B$, so gilt $\nabla u(x_0) \neq 0$, d.h. $\mathcal{F}$ ist reell analytisch nahe x_0.*

(b) Dieselbe Aussage gilt für D^- anstatt D^+, falls $\alpha \geq \Lambda(\alpha, A)$ ist.

Die Bedingung in (b) ist für große α erfüllt: Es gibt ein $\overline{\alpha}_\Omega(A)$, so daß $\alpha \geq \Lambda(\alpha, A)$ genau dann gilt, wenn $\alpha \geq \overline{\alpha}_\Omega(A)$ ist (siehe Proposition 10 in [CGIKO]).

Damit folgt zum Beispiel, daß $\mathcal{F}$ keine ‚Spitze' haben kann, die nach D^+ hineinzeigt, und für große α auch keine, die nach D^- hineinzeigt. Insbesondere muß $\mathcal{F}$ reguläre Punkte enthalten (man wähle einen beliebigen Punkt x in D^+, dann ist jeder zu x nächste Punkt von $\mathcal{F}$ regulär).

Lemma 4.7 ist eines der zentralen Hilfsmittel im Beweis unseres Hauptresultates über die Regularität von $\mathcal{F}$. Wir geben hier nur die wichtigste Aussagen von Theorem 9 und Proposition 2 wieder, der Einfachheit halber für den Fall $\alpha > \Lambda(\alpha, A)$:

Theorem 4.8 (Theorem 9 und Proposition 2 in [CGK]) *Definiere für $\varepsilon > 0$*

$$K_\varepsilon = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \mathcal{F}) = \varepsilon\},$$
$$F_\varepsilon = \{x \in \mathcal{F} : \operatorname{dist}(x, K_\varepsilon) = \varepsilon\}$$

und

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \setminus \bigcup_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon$$

(die exzeptionelle Menge). Es sei $\alpha > \Lambda(\alpha, A)$. Dann gilt:

(i) $\mathcal{E}$ ist eine G_δ-Menge.

(ii) $\mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$ *ist eine reell-analytische Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^n$ *und liegt dicht in* $\mathcal{F}$.

Wir bemerken noch, daß wir für ebene Gebiete vermuten, daß die singuläre Menge von $\mathcal{F}$ endlich ist.

Literatur

[1] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and Riemannian geometry I. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:43–69, 1975.

[2] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 69:422–433, 1963.

[3] V. Avakumovič. Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.*, 65:327–344, 1956.

[4] R. Bañuelos and M. van den Berg. Dirichlet eigenfunctions for horn-shaped regions and Laplacians on cross sections. *J. London Math. Soc.*, 53:503–511, 1996.

[5] J. Brüning. Irregular spectral asymptotics. Erscheint in: *Can.Math.Soc. Conference Proceedings.*

[6] J. Brüning. Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators. *Math. Z.*, 158:15–21, 1978.

[7] J. Brüning. On the compactness of isospectral potentials. *Commun. Partial Differ. Equations*, 9:687–698, 1984.

[8] J. Brüning. The signature theorem for manifolds with metric horns. In *Equations aux dérivées partielles*, St. Jean de Monts, 1996.

[9] J. Brüning and E. Heintze. Representations of compact Lie groups and elliptic operators. *Invent. Math.*, 50:169–203, 1979.

[10] J. Brüning and E. Heintze. The asymptotic expansion of Minakshisundaram-Pleijel in the equivariant case. *Duke Math. J.*, 51:959–980, 1984.

[11] J. Brüning and M. Lesch. Hilbert complexes. *J. Funct. Anal.*, 108(1):88–132, August 1992.

[12] J. Brüning and M. Lesch. Kähler–Hodge theory for conformal complex cones. *Geom. Funct. Anal.*, 3:439–473, 1993.

[13] J. Brüning and R. Seeley. Regular singular asymptotics. *Adv. in Math.*, 58:133–148, 1985.

[14] J. Brüning and R. Seeley. The resolvent expansion for second order regular singular operators. *J. Func. Anal.*, 73:369–429, 1987.

[15] J. Brüning and R. Seeley. An index theorem for first order regular singular operators. *Amer. J. Math.*, 110:659–714, 1988.

[16] J. Brüning and R. Seeley. The expansion of the resolvent near a singular stratum of conical type. *J. Funct. Anal.*, 95:255–290, 1991.

[17] J. Brüning and R. Seeley. On Witt spaces with one singular stratum. Preprint, 1999.

[18] J. Chazarain. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24:65–82, 1974.

[19] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In *Problems in Analysis*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[20] J. Cheeger. On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds. In *Proc. Symp. Pure Math. 36*, pages 91–146, 1980.

[21] J. Cheeger. Hodge theory of complex cones. In *Analyse et topologie sur les espaces singuliers*, Astérisque 102, pages 118–134. Soc. Math. France, 1983.

[22] J. Cheeger. Spectral geometry on singular Riemannian spaces. *J. Differential Geom.*, 18:575–657, 1983.

[23] J. Cheeger, M. Goresky, and R. MacPherson. *L^2–cohomology and intersection homology of algebraic varieties.* Annals of Math. Studies 102. Princeton University Press, 1982.

[24] Y. Colin-de Verdière. Sur les longeurs des trajectoires périodiques d'un billiard. In P. Dazord and N. Desolneux-Moulis, editors, *Géométrie Symplectique et de Contact: Autour du Theorème de Poincré-Birkhoff. Travaux en Cours, Sem. Sud-Rhodanien de Géométrie III*, pages 122–139. Herman, Paris, 1984.

[25] R. Courant and D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik, Band I, II.* Springer Verlag, Berlin, 1924.

[26] X. Dai and R. B. Melrose. The adiabatic limit of analytic torsion. Preprint.

[27] E. Davies. *Heat kernels and spectral theory.* Cambridge University Press, 1989.

[28] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds. *Inv. Math.*, 93:161–183, 1988.

[29] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions: Riemannian manifolds with boundary. In *Moser volume, Analysis*, volume 93, pages 251–262. Academic Press, New York, 1990.

[30] J. Duistermaat and V. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29:39–79, 1975.

[31] C. Faber. Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt. In *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Phys. München*, pages 169–172, 1923.

[32] B. V. Fedosov, B.-W. Schulze, and N. N. Tarkhanov. The index of elliptic operators on manifolds with conical points. *Sel. Math., New Ser.*, 5:467–506, 1999.

[33] S. Fournais. The nodal surface of the second eigenfunction of the Laplacian in R^D can be closed. Preprint, University of Aarhus, 1999.

[34] E. Getzler. A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem. *Topology*, 25:111–117, 1986.

[35] J. Gil. *Heat trace asymptotics for cone differential operators.* PhD thesis, Universität Potsdam, 1998.

[36] P. B. Gilkey. *Invariance theory, the heat-equation, and the Atiyah-Singer index theorem.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 2 edition, 1995.

[37] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110:1–22, 1992.

[38] D. Grieser. *L^p bounds for eigenfunctions and spectral projections of the Laplacian near concave boundaries.* PhD thesis, University of California, Los Angeles, 1992.

[39] D. Grieser. Uniform bounds for eigenfunctions of the Laplacian on manifolds with boundary. Preprint, 1994.

[40] D. Grieser and M. Lesch. On the L^2-Stokes theorem and Hodge theory for singular algebraic varieties. Preprint SFB 288, 1999.

[41] M. Gromov. Spectral geometry of semi-algebraic sets. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 42:249–274, 1992.

[42] V. Guillemin. Wave trace invariants. *Duke Math. J.*, 83:287–352, 1996.

[43] R. Hardt, M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, and N. Nadirashvili. Critical sets of solutions to elliptic equations. *J. Differ. Geom.*, 51:359–373, 1999.

[44] W. Hayman. Some bounds for principal frequency. *Applicable Anal.*, 7:247–254, 1978.

[45] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, and N. Nadirashvili. The nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in R^2 can be closed. *Duke Math. J.*, 90:631–640, 1997.

[46] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, and N. Nadirashvili. The nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$ can be closed. *Duke Math. J.*, 90(3):631–640, 1997.

[47] L. Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121:193–218, 1968.

[48] W. C. Hsiang and V. Pati. L^2-cohomology of normal algebraic surfaces I. *Invent. Math.*, 81:395–412, 1985.

[49] H. Iwaniec and P. Sarnak. L^∞ norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces. *Annals of Math.*, 141:301–320, 1995.

[50] D. Jerison. The first nodal line of a convex planar domain. *Int. Math. Res. Not.*, 1991(1):1–5, 1991.

[51] D. Jerison. The diameter of the first nodal line of a convex domain. *Ann. Math., II. Ser.*, 141(1):1–33, 1995.

[52] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Am. Math. Mon., Part II*, 73:1–23, April 1966.

[53] T. Kawasaki. The index of elliptic operators over V-manifolds. *Nagoya Math. J.*, 84:135–157, 1981.

[54] E. Krahn. Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. *Math. Ann.*, 94:97–100, 1925.

[55] M. Lesch. *Operators of Fuchs type, conical singularities, and asymptotic methods.* Number 136 in Teubner Texte zur Mathematik. Teubner–Verlag, Leipzig, 1997.

[56] M. Lesch and N. Peyerimhoff. An index theorem for manifolds with metric horns. *Comm. Partial Differential Equations*, 23:649–684, 1998.

[57] B. Levitan. Über die Entwicklung nach den Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators (Russisch). *Dokl. Akad. Nauk SSSR, n. Ser.*, 90:133–135, 1953.

[58] J. Lott. Signatures and higher signatures of S^1-quotients. Preprint, 1998.

[59] V. Maz'ja, S. Nazarov, and P. Plamenevskij. *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten, Band I,II.* Akademie Verlag, Berlin, 1991.

[60] R. Mazzeo and R. B. Melrose. The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence for a fibration. *J. Differ. Geom.*, 31(1):185–213, 1990.

[61] A. Melas. On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in R^2. *J. Diff. Geom.*, 35:255–263, 1992.

[62] A. D. Melas. On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in $\mathbb{R}^2$. *J. Differ. Geom.*, 35(1):255–263, 1992.

[63] R. B. Melrose. Differential analysis on manifolds with corners. Book in preparation. http://www-math.mit.edu/~rbm/book.html.

[64] R. B. Melrose. Isospectral sets of drumheads are compact in C^∞. MSRI preprint.

[65] R. B. Melrose. Pseudodifferential operators, corners and singular limits. In *Proc. Int. Congr. Math., Kyoto/Japan 1990, Vol. I*, pages 217–234, 1991.

[66] R. B. Melrose. Calculus of conormal distributions on manifolds with corners. *Int. Math. Res. Not.*, 3:51–61, 1992.

[67] R. B. Melrose. *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem.* A. K. Peters, Ltd., Boston, Mass., 1993.

[68] S. Minakshisundaram and A. Pleijel. Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. *Can. J. Math.*, 1:242–256, 1949.

[69] E. A. Mooers. Heat kernel asymptotics on manifolds with conic singularities. *J. Anal. Math.*, 78:1–36, 1999.

[70] T. Mostowski. *Lipschitz equisingularity.* Dissertationes Math. CCXLIII. PWN, Warszawa, 1985.

[71] M. Nagase. Remarks on the L^2-cohomology of singular algebraic surfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 41:97–116, 1989.

[72] M. Nagase. Hodge theory of singular algebraic curves. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 108:1095–1101, 1990.

[73] T. Ohsawa. Cheeger-Goresky-MacPherson's conjecture for the varieties with isolated singularies. *Math. Z.*, 206:219–224, 1991.

[74] B. Osgood, R. Phillips, and P. Sarnak. Compact isospectral sets of surfaces. *J. Funct. Anal.*, 80:212–234, 1988.

[75] R. Osserman. A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum. *Comment. Math. Helv.*, 52:545–555, 1977.

[76] W. Pardon and M. Stern. Pure Hodge structure on the L^2-cohomology of varieties with isolated singularities. Preprint, alg-geom/9711003, 1997.

[77] A. Parusiński. Lipschitz stratification of subanalytic sets. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 27:661–696, 1994.

[78] V. Pati. The heat trace on singular algebraic threefolds. *J. Differential Geom.*, 37:245–261, 1993.

[79] M. Pflaum. *Ein Beitrag zur Geometrie und Analysis auf stratifizierten Räumen.* Habilitationsschrift, Humboldt-Universität, Berlin, 2000.

[80] B.-W. Schulze. *Pseudo-Differential Operators on Manifolds with Singularities*, volume 24 of *Stud. Math. Appl.* North-Holland, Amsterdam, 1991.

[81] R. Sjamaar. L^2-cohomology of orbit spaces. *Topology Appl.*, 45:1–11, 1992.

[82] H. Smith and C. Sogge. On the critical semilinear wave equation outside convex obstacles. *J. Am. Math. Soc.*, 8:879–916, 1995.

[83] C. Sogge. Concerning the L^p norm of spectral clusters for second order elliptic operators on compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 77:123–134, 1988.

[84] H. Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). *Math. Ann.*, 71:441–479, 1912.

[85] B. Youssin. L^p cohomology of cones and horns. *J. Differential Geom.*, 39:559–603, 1994.

[86] S. Zelditch. Spectral determination of analytic axi-symmetric plane domains. Preprint, lanl-archive math.SP/9901005, 1999.

Weitere Literatur findet sich bei den einzelnen Arbeiten.