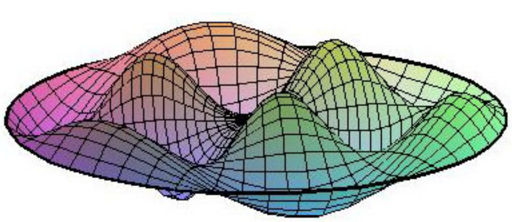
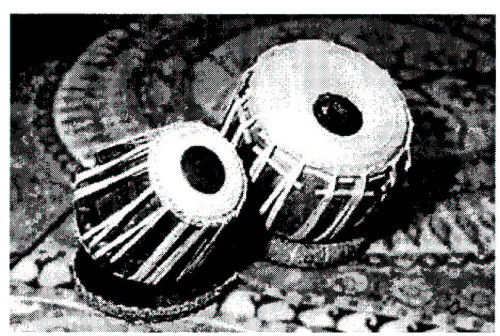
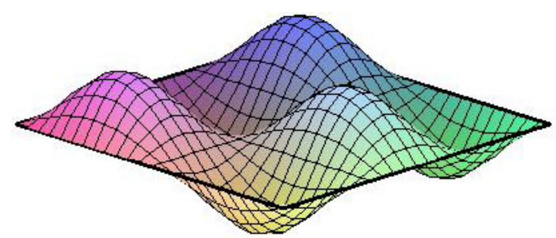
5. TAG DER MATHEMATIK

Kann man die Form einer Trommel hören?

Prof. Dr. Daniel Grieser







Die 3 Grundgesetze der Schwingungen

Die 3 Grundgesetze der Schwingungen

1. Es gibt gewisse elementare Schwingungsformen verschiedener Frequenzen: Bei diesen ist das Profil immer ähnlich zum Anfangsprofil.

Die 3 Grundgesetze der Schwingungen

1. Es gibt gewisse elementare Schwingungsformen verschiedener Frequenzen: Bei diesen ist das Profil immer ähnlich zum Anfangsprofil.

2. Jede Schwingungsform ist Summe von mehreren elementaren Schwingungsformen; diese sind in unterschiedlichen Stärken vertreten.

Die 3 Grundgesetze der Schwingungen

1. Es gibt gewisse elementare Schwingungsformen verschiedener Frequenzen: Bei diesen ist das Profil immer ähnlich zum Anfangsprofil.

2. Jede Schwingungsform ist Summe von mehreren elementaren Schwingungsformen; diese sind in unterschiedlichen Stärken vertreten.

3. Die Klangfarbe einer Schwingungsform bestimmt sich (hauptsächlich) aus:

Die 3 Grundgesetze der Schwingungen

1. Es gibt gewisse elementare Schwingungsformen verschiedener Frequenzen: Bei diesen ist das Profil immer ähnlich zum Anfangsprofil.

2. Jede Schwingungsform ist Summe von mehreren elementaren Schwingungsformen; diese sind in unterschiedlichen Stärken vertreten.

3. Die Klangfarbe einer Schwingungsform bestimmt sich (hauptsächlich) aus:

   - den Frequenzen der in ihr vorkommenden elementaren Schwingungsformen

Die 3 Grundgesetze der Schwingungen

1. Es gibt gewisse elementare Schwingungsformen verschiedener Frequenzen: Bei diesen ist das Profil immer ähnlich zum Anfangsprofil.

2. Jede Schwingungsform ist Summe von mehreren elementaren Schwingungsformen; diese sind in unterschiedlichen Stärken vertreten.

3. Die Klangfarbe einer Schwingungsform bestimmt sich (hauptsächlich) aus:

   - den Frequenzen der in ihr vorkommenden elementaren Schwingungsformen
   - deren Stärken

Die 3 Grundgesetze der Schwingungen

1. Es gibt gewisse elementare Schwingungsformen verschiedener Frequenzen: Bei diesen ist das Profil immer ähnlich zum Anfangsprofil.

2. Jede Schwingungsform ist Summe von mehreren elementaren Schwingungsformen; diese sind in unterschiedlichen Stärken vertreten.

3. Die Klangfarbe einer Schwingungsform bestimmt sich (hauptsächlich) aus:

   - den Frequenzen der in ihr vorkommenden elementaren Schwingungsformen
   - deren Stärken

Eigenfunktionen = Anfangsprofile elementarer Schwingungsformen

Eigenfrequenzen = deren Frequenzen (= Obertöne = Resonanzfrequenzen).

Das Problem

Wie beeinflußt die Form eines schwingenden Gegenstandes

die Frequenzen der Obertöne und das Profil der Eigenfunktionen?

Methodik

Methodik

Physikalische Überlegungen $\longrightarrow$ Mathematische Gleichung

Methodik

Physikalische Überlegungen $\longrightarrow$ Mathematische Gleichung

Lösen der Gleichung:

- Formel (ein Glücksfall!)

Methodik

Physikalische Überlegungen $\longrightarrow$ Mathematische Gleichung

Lösen der Gleichung:

- Formel (ein Glücksfall!)
- Computer (für Einzelfälle nützlich, wenig Verständnis qualitativer Zusammenhänge)

Methodik

Physikalische Überlegungen $\longrightarrow$ Mathematische Gleichung

Lösen der Gleichung:

- Formel (ein Glücksfall!)
- Computer (für Einzelfälle nützlich, wenig Verständnis qualitativer Zusammenhänge)
- Kunst der Mathematik: wie man trotzdem etwas erfährt, auch wenn man es nicht genau ausrechnen kann (Intuition, Ideen, Geduld).

Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

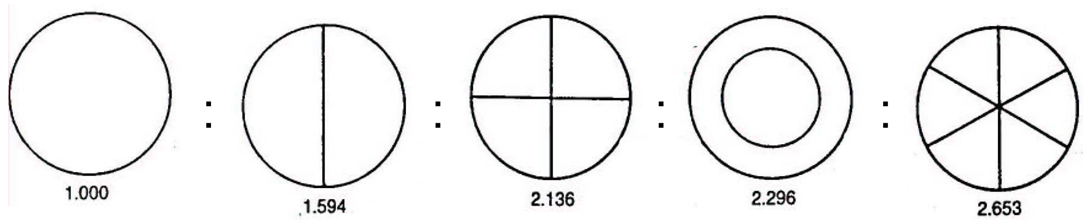
Saite: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 ...

Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

Saite:	1	:	2	:	3	:	4	:	5	...
Quadratische Trommel:	1	:	1,58	:	2	:	2,54	:	2,91	...

Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

Saite:	1	:	2	:	3	:	4	:	5	...
Quadratische Trommel:	1	:	1,58	:	2	:	2,54	:	2,91	...

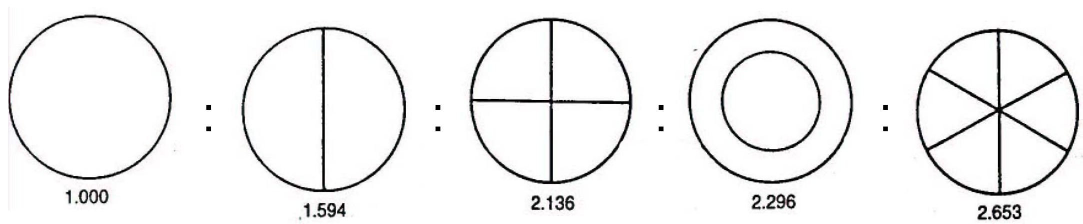
Runde Trommel:  ...

Einige Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen

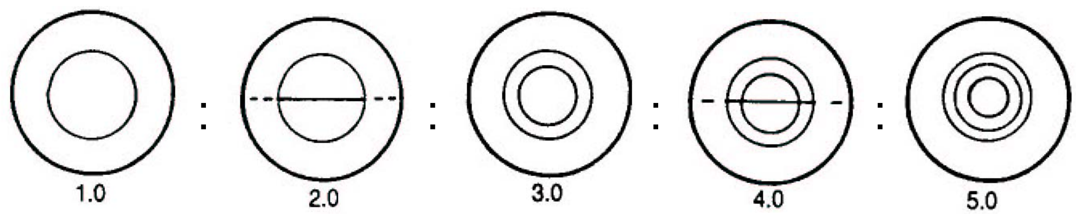
Saite: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 ...

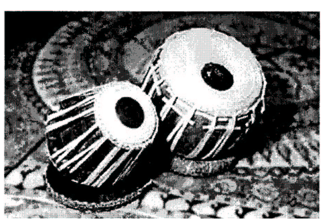
Quadratische Trommel: 1 : 1,58 : 2 : 2,54 : 2,91 ...

Runde Trommel:

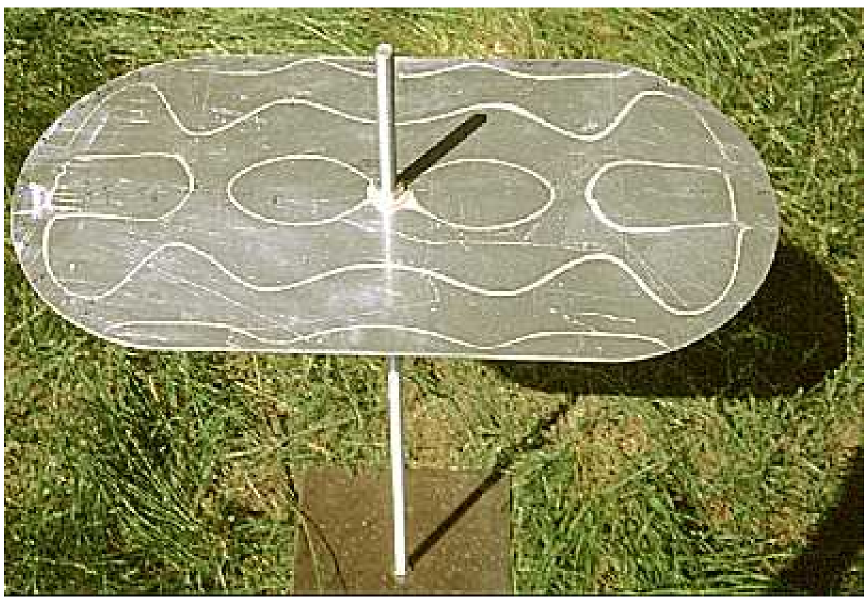


Indische Tabla:

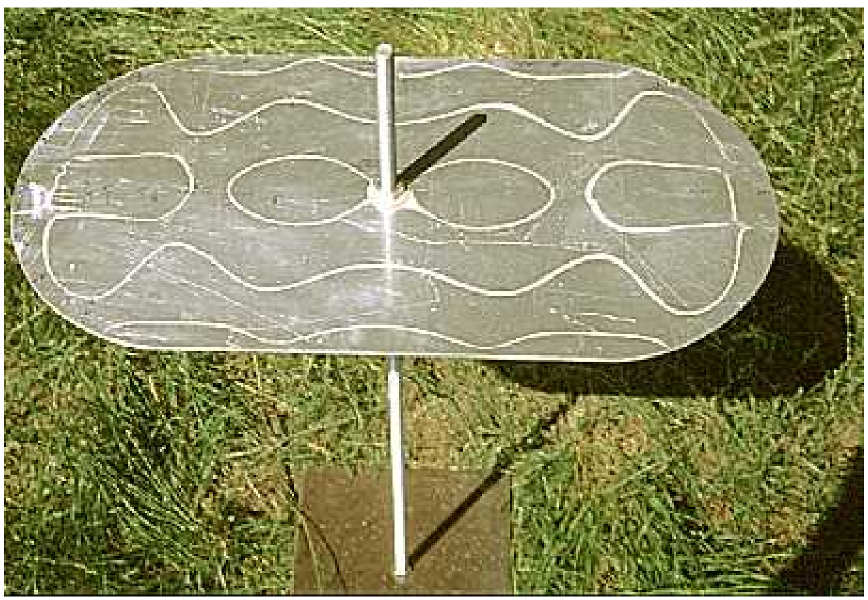


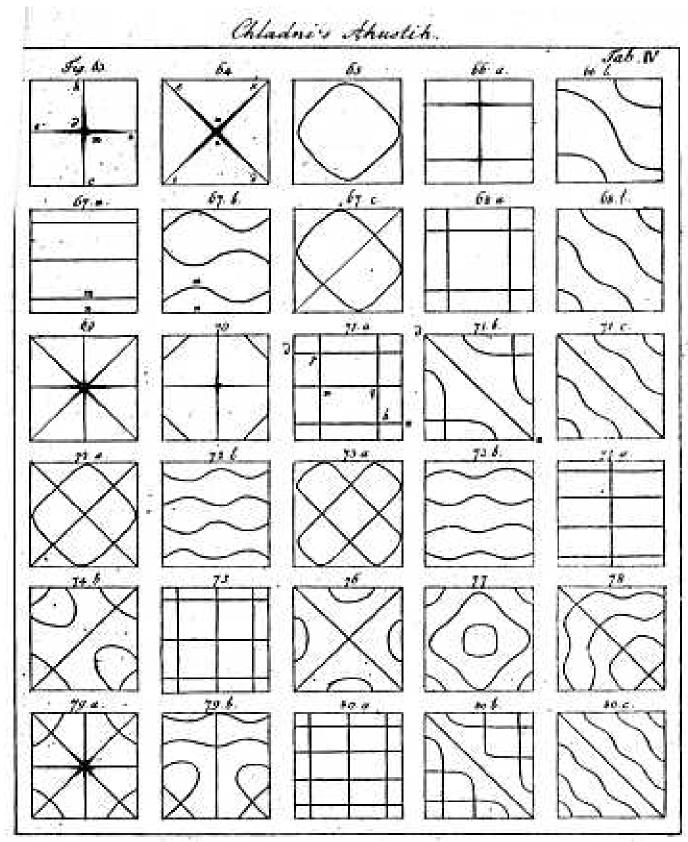


Chladnis Klangfiguren



Chladnis Klangfiguren





Trommeln und Primzahlen

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Welche Eigenfrequenzen entstehen aus mehreren Eigenfunktionen?

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Welche Eigenfrequenzen entstehen aus mehreren Eigenfunktionen?

$$13 \quad = \quad 2^2 \quad + \quad 3^2$$

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Welche Eigenfrequenzen entstehen aus mehreren Eigenfunktionen?

$$\begin{array}{ccccccccc} 13 & = & 2^2 & + & 3^2 & & & & \\ 50 & = & 1^2 & + & 7^2 & = & 5^2 & + & 5^2 \end{array}$$

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Welche Eigenfrequenzen entstehen aus mehreren Eigenfunktionen?

$$
\begin{array}{ccccccccc}
13 & = & 2^2 & + & 3^2 & & & & \\
50 & = & 1^2 & + & 7^2 & = & 5^2 & + & 5^2 \\
65 & = & 1^2 & + & 8^2 & = & 4^2 & + & 7^2
\end{array}
$$

Trommeln und Primzahlen

Beispiel: Quadrat $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$

Eigenfunktionen: $\sin nx \cdot \sin my$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
Eigenfrequenzen: $\sqrt{n^2 + m^2}$

Frage: Welche Eigenfrequenzen entstehen aus mehreren Eigenfunktionen?

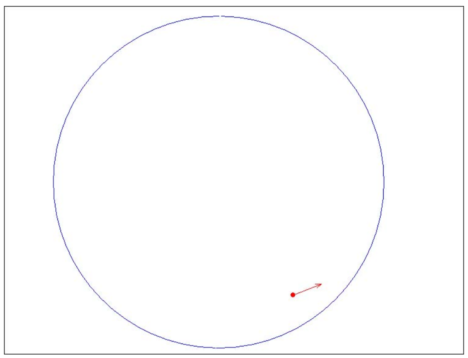
$$\begin{array}{ccccccccc} 13 & = & 2^2 & + & 3^2 & & & & \\ 50 & = & 1^2 & + & 7^2 & = & 5^2 & + & 5^2 \\ 65 & = & 1^2 & + & 8^2 & = & 4^2 & + & 7^2 \end{array}$$

Antwort: In der Primfaktorzerlegung müssen mehrere Primzahlen der Form $4k + 1$ vorkommen!

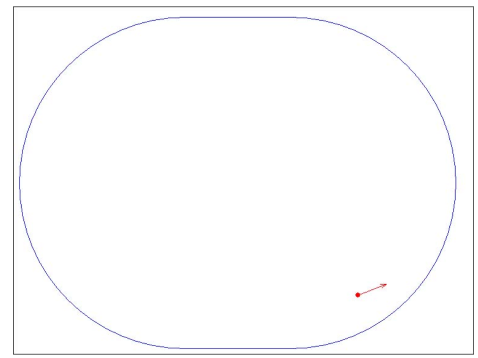
$(50 = 2 \cdot 5 \cdot 5,\ 65 = 5 \cdot 13)$

Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

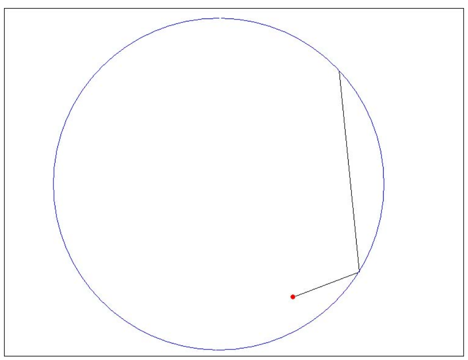


Chaos

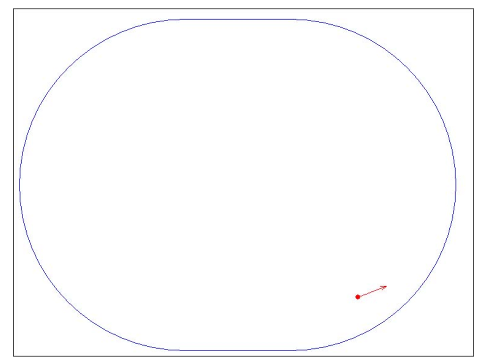


Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

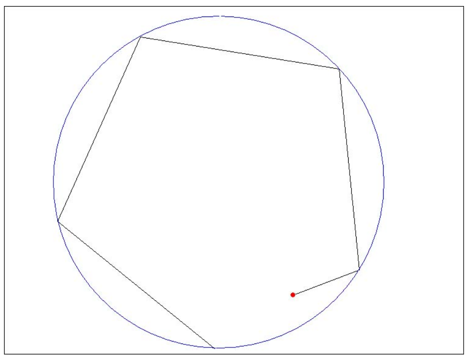


Chaos

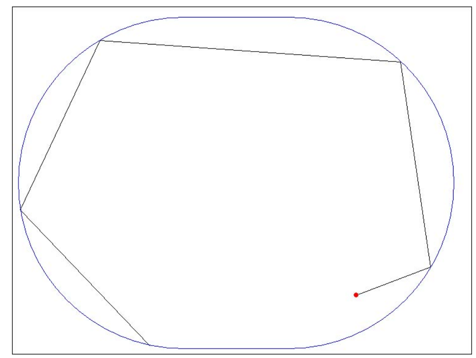


Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

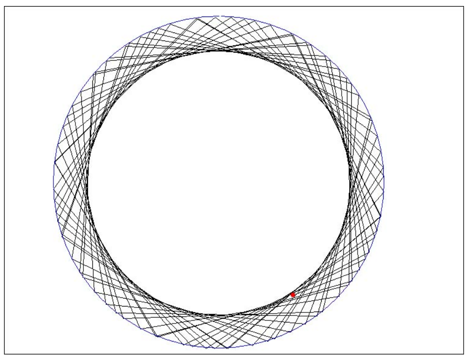


Chaos

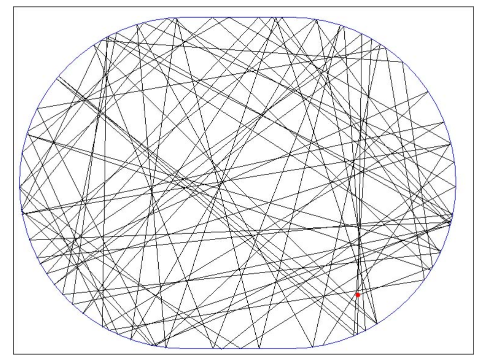


Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

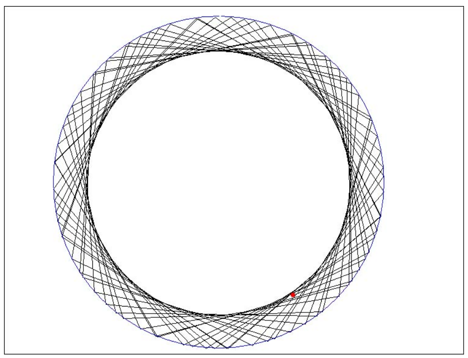


Chaos

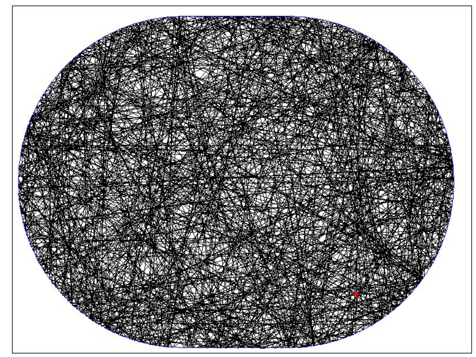


Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung



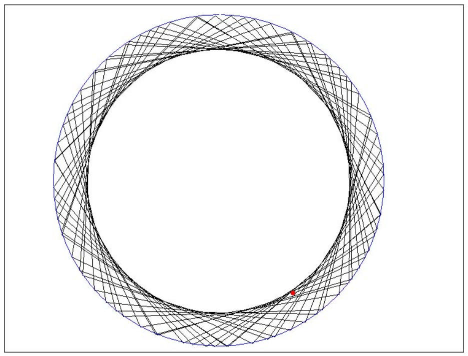
Chaos

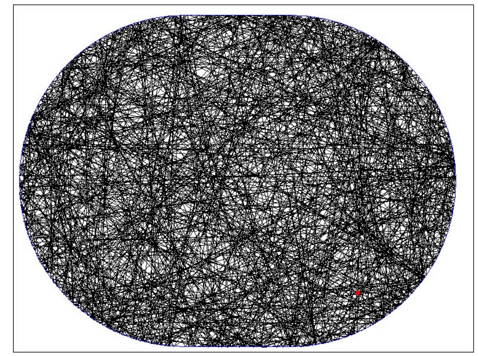


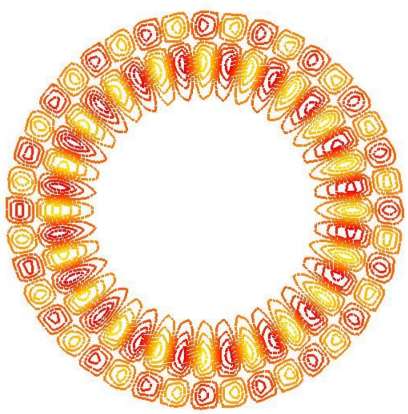
Trommeln, Billard und Chaos

Ordnung

Chaos







http://www.students.bucknell.edu/tgoodman/Chaos/index.html

Was kann man hören?

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher.

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales "Gehör")

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $f_n \longrightarrow \infty$? $\rightsquigarrow$ Fläche

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $f_1 \le f_2 \le f_3 \le \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $f_n \longrightarrow \infty$? $\rightsquigarrow$ Fläche
Fluktuation um erste Näherung $\rightsquigarrow$ Umfang

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $f_n \longrightarrow \infty$?	$\rightsquigarrow$	Fläche
Fluktuation um erste Näherung	$\rightsquigarrow$	Umfang
Detail der Fluktuation	$\rightsquigarrow$	Löcher

Was kann man hören?

Ein Satz: (mathematisch, d.h. ideale Trommel, ideales “Gehör”)

Die Eigenfrequenzen einer Trommel bestimmen

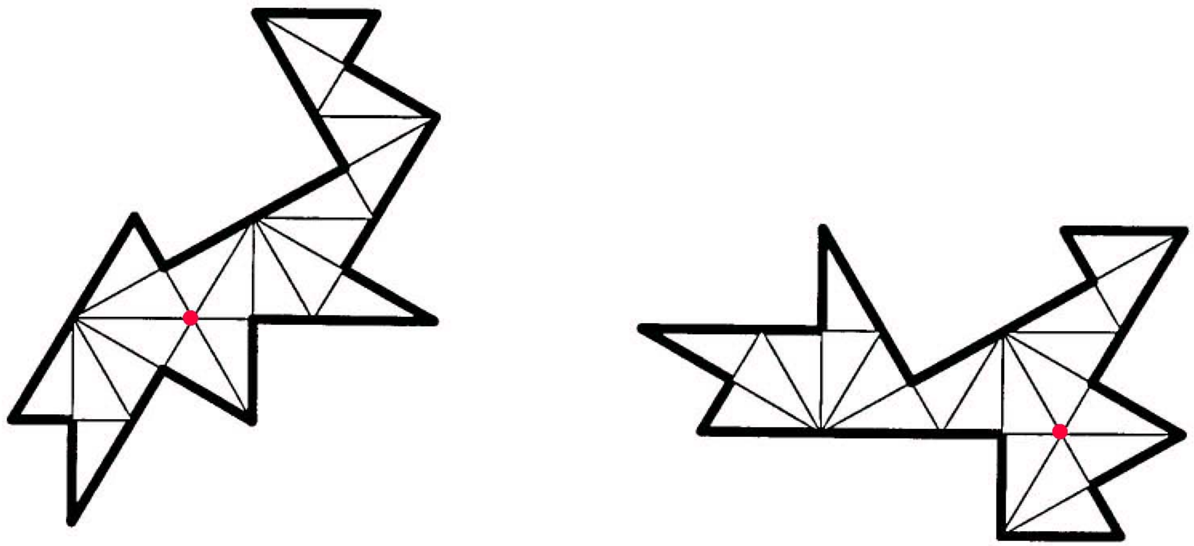
- ihren Flächeninhalt,
- die Länge des Randes,
- die Anzahl der Löcher.

Beweisidee: Eigenfrequenzen $f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \longrightarrow \infty$.

Wie schnell $f_n \longrightarrow \infty$?	$\rightsquigarrow$ Fläche
Fluktuation um erste Näherung	$\rightsquigarrow$ Umfang
Detail der Fluktuation	$\rightsquigarrow$ Löcher

Verwandte Probleme: Spektroskopie (Chemie, Astronomie etc.), Seismologie

Man kann nicht die Form einer Trommel hören.



klingen gleich!

C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert: Inventiones Mathematicae 110 (1992),
P. Buser, J. Conway, P. Doyle, K.-D. Semmler: Int.Math.Res.Not. 1994.

Offene Probleme

- Kann man die Form einer Trommel ohne Ecken, oder einer konvexen Trommel, hören?

Offene Probleme

- Kann man die Form einer Trommel ohne Ecken, oder einer konvexen Trommel, hören?
- Wie genau zeigt sich Chaos in den Eigenfunktionen?

Offene Probleme

- Kann man die Form einer Trommel ohne Ecken, oder einer konvexen Trommel, hören?
- Wie genau zeigt sich Chaos in den Eigenfunktionen?
- Gibt es in jedem Dreieck eine geschlossene Billiardkugelbahn?

http://www.mathematik.uni-oldenburg.de/personen/grieser/