Die Macht der Wiederholung
Über Iterationen, Gleichungen und Chaos

Prof. Dr. Daniel Grieser

8. November 2006

http://www.mathematik.uni-oldenburg.de/personen/grieser/

Was passiert, wenn man immer wieder das gleiche tut?

Was passiert, wenn man immer wieder das gleiche tut?

- Ordnung

Was passiert, wenn man immer wieder das gleiche tut?

- Ordnung – mathematisch: Lösen komplizierter Gleichungen

Was passiert, wenn man immer wieder das gleiche tut?

- Ordnung – mathematisch: Lösen komplizierter Gleichungen

  oder ...

Was passiert, wenn man immer wieder das gleiche tut?

- Ordnung – mathematisch: Lösen komplizierter Gleichungen

  oder ...

- CHAOS

Ordnung: Lösen von Gleichungen

$$x_1 = \cos x_0$$

$$x_2 = \cos x_1$$

$$x_3 = \cos x_2$$

etc.

Beobachtung: $x_n \to x \quad$ für $n \to \infty$

Ordnung: Lösen von Gleichungen

$$x_1 = \cos x_0$$

$$x_2 = \cos x_1$$

$$x_3 = \cos x_2$$

etc.

Beobachtung: $x_n \to x \quad$ für $n \to \infty$

Warum?

Ordnung: Lösen von Gleichungen

$$x_1 = \cos x_0$$

$$x_2 = \cos x_1$$

$$x_3 = \cos x_2$$

etc.

Beobachtung: $x_n \to x \quad$ für $n \to \infty$

Warum?

wobei $x =$ die Lösung der Gleichung $\cos x = x$

Ordnung: Lösen von Gleichungen

$$x_1 = \cos x_0$$

$$x_2 = \cos x_1$$

$$x_3 = \cos x_2$$

etc.

Beobachtung: $x_n \to x \quad$ für $n \to \infty$

Warum?

wobei $x =$ die Lösung der Gleichung $\cos x = x$

Warum?

Ordnung: Lösen von Gleichungen

$$x_1 = \cos x_0$$

$$x_2 = \cos x_1$$

$$x_3 = \cos x_2$$

etc.

Beobachtung: $x_n \to x \quad$ für $n \to \infty$

Warum?

wobei $x =$ die Lösung der Gleichung $\cos x = x$

Warum?

$$x_n \to x \qquad \Rightarrow \cos x_n \to \cos x$$

$$\cos x_n = x_{n+1} \to x$$

$$\Rightarrow \cos x = x$$

Es geht auch noch allgemeiner...

Mit Iterationen haben wir gelöst:

- Eine Gleichung, wo die Unbekannte eine Zahl war ($\cos x = x$)

Es geht auch noch allgemeiner...

Mit Iterationen haben wir gelöst:

- Eine Gleichung, wo die Unbekannte eine Zahl war ($\cos x = x$)
- eine Gleichung, wo die Unbekannte ein Punkt der Ebene war

Es geht auch noch allgemeiner...

Mit Iterationen haben wir gelöst:

- Eine Gleichung, wo die Unbekannte eine Zahl war ($\cos x = x$)
- eine Gleichung, wo die Unbekannte ein Punkt der Ebene war

Treiben wir es auf die Spitze...

Es geht auch noch allgemeiner...

Mit Iterationen haben wir gelöst:

- Eine Gleichung, wo die Unbekannte eine Zahl war ($\cos x = x$)
- eine Gleichung, wo die Unbekannte ein Punkt der Ebene war

Treiben wir es auf die Spitze...

Eine Gleichung, wo die Unbekannte eine Funktion ist:

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

Die Differentialgleichung $y' = y,\ y(0) = 1$

1. Versuch: $y_0 = 1$, $y_1 = y_0' = 0$

Die Differentialgleichung $y' = y,\ y(0) = 1$

1. Versuch: $y_0 = 1$, $y_1 = y_0' = 0$ ... Quatsch

Die Differentialgleichung $y' = y,\ y(0) = 1$

1. Versuch: $y_0 = 1$, $y_1 = y_0' = 0$ ... Quatsch

2. Versuch: Die Differentialgleichung ist gleichbedeutend mit

$$y = 1 + \int_0^x y(t)\,dt$$

2. Versuch

$$y = 1 + \int_0^x y(t)\,dt$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + x + x^2/2$$

$$y_3 = 1 + x + x^3/6$$

2. Versuch

$$y = 1 + \int_0^x y(t)\,dt$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + x + x^2/2$$

$$y_3 = 1 + x + x^3/6$$

$$y_n \to 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Das ist die Exponentialfunktion e^x.