Geschichte des 4-Farben-Problems

1852	F. Guthrie: Erste dokumentierte Erwähnung
	De Morgan: 'Ich habe das Gefühl, daß im Fall von 4 Ländern, von denen je zwei stets eine gemeinsame Grenze haben, immer eines von den drei anderen eingeschlossen wird, so daß es nicht mit einem fünften verbunden sein kann. Wenn das stimmt, so sollten 4 Farben tatsächlich immer genügen. Aber es ist nicht einfach und ich bin nicht sicher über die möglichen Verwicklungen.'
1878	Cayley stellt das Problem der London Math. Society vor
1879	Kempe (Jurist!) veröffentlicht 'Beweis'
1890	Heawood findet Fehler, beweist 5-Farben-Satz
20. Jh.	Entwicklung der Graphentheorie, stark von der 4-Farben-Vermutung inspiriert
1950	Heesch: Beweis 'sollte möglich sein', ≤ 10000 Atome
1976	Appel, Haken, Koch: Erster Beweis, 1476 Atome
1997	Robertson, Sanders, Seymour, Thomas: Vereinfachter Beweis, 633 Atome

Die zwei Hauptideen

Wie färbt man einen Graphen?

1. Versuch: Färbe die Ecken nacheinander mit möglichst wenig Farben.

(Brauche eventuell beliebig viele Farben.)

2. Versuch: (Planen) Lege zunächst die Reihenfolge fest, dann wie oben.

Behauptung: Es gibt eine Ecke E mit höchstens 5 Nachbarn.

Strategie: Färbe zunächst $G \setminus E$ (Induktion!), dann E.

$\Longrightarrow$ **6-Farben-Satz**

3. Versuch: (Umfärben) Falls E genau 5 Nachbarn hat und diese nach Färben von $G \setminus E$ verschiedenfarbig sind, färbe eine davon um! Verwende die freigewordene Farbe für E.

$\Longrightarrow$ **5-Farben-Satz**

Beispiel:

Graphen auf Flächen

M = geschlossene Fläche, $\chi(M)$ = Euler-Charakteristik von M

$\chi(M) = \quad 2 \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad -2$

G planar $\Longleftrightarrow$ G kann in die Sphäre eingebettet werden.

Satz: *Falls M nicht die Sphäre ist, so gilt:*

(a) (Heawood) G kann in M eingebettet werden $\Longrightarrow$ G ist $k(M)$-färbbar,

$$k(M) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2} \right\rfloor$$

(Ausnahme: k(Kleinsche Flasche) $= 6$).

(b) Dies ist bestmöglich.

Beispiel: M = Torus, $\chi = 0$, $k = 7$:

Eine spektrale Grapheninvariante
(Y. Colin-de-Verdière, 1990)

$M =$ geschlossene Fläche	$G =$ Graph
$g =$ Riemannsche Metrik	$g : \mathcal{K} \to (0, \infty)$ 'Metrik'
Für $f, h : M \to \mathbb{R}$	Für $f, h : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$
bedeutet $h = \Delta_g f$:	bedeutet $h = \Delta_g f$:
$h(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4}{\varepsilon^2} \left(\fint_{S_\varepsilon(x)} f(y) dy - f(x) \right)$	$h(x) = \left(\sum_{y \sim x} g(x,y) f(y) \right) - f(x)$
Sei $V : M \to \mathbb{R}$.	Sei $V : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$.

Betrachte die Gleichung

$$\boxed{-\Delta_g f + V f = \lambda f}$$

Eigenwerte:	λ_1	$<$	λ_2	$<$	λ_3	$<$	$\ldots$	∞
Multiplizitäten:	m_1		m_2		m_3		$\ldots$	

Problem: Gegeben M (bzw. G) und λ_i, m_i ($i \leq N$), gibt es g, V mit diesen Eigenwerten und Multiplizitäten?

Satz: *λ_i können beliebig vorgegeben werden, m_i nicht.*

Satz: *M = Sphäre $\Longrightarrow m_2 \leq 3$.*

Definition: $\mu(G) = \max_{g,V} \{ m_2 : \textit{Stabilitätsbedingung erfüllt} \}$.

Satz: *G planar $\Longleftrightarrow \mu(G) \leq 3$.*

Der Beweis

Beweis des 5-Farben-Satzes:

(I) Jeder Graph G ist aus gewissen 'Atomen' aufgebaut.

Atome:

(II) Tritt Atom A in G auf, so läßt sich *jede* 5-Färbung von $G \setminus A$ zu einer 5-Färbung von G modifizieren.

1. Modifiziere mittels 2-Farben-Ketten.
2. Dehne die Färbung auf A aus.

Wesentlich: Es reicht, sich A und seinen 'Ring' anzusehen!

Idee für den Beweis des 4-Farben-Satzes:

- **Verwende größere Atome (mehr Flexibilität bei 1.,2.),**
- **dann braucht man aber mehr Atome.**

Robertson, Sanders, Seymour, Thomas:
633 Atome, Ringgröße ≤ 14

- Beweis, daß jeder Graph aus diesen Atomen aufgebaut ist: 20 min. Computer, oder mehrere Monate per Hand.
- Beweis, daß sich 4-Färbungen für alle Atome modifizieren lassen:
  3 Std. Computer (für jedes Atom sind etwa 200.000 Färbungen zu testen)

Schlussbemerkungen

Zur Rolle des Computers:

- Vor dem Beweis: Experimente helfen, Intuition zu entwickeln.
- Beim Beweis: Der Computer kann sehr *zuverlässig* viele Einzelfälle testen.

Ist der Beweis

- *gültig*? $\longrightarrow$ Standards der Überprüfbarkeit
- *zufriedenstellend*? $\longrightarrow$ Ästhetik, Erwartungen an die Mathematik

Ist das 4-Farben-Problem ein 'gutes' Problem?

Ein interessantes Problem:
Gibt es Probleme, die nur mit Computerhilfe lösbar sind?