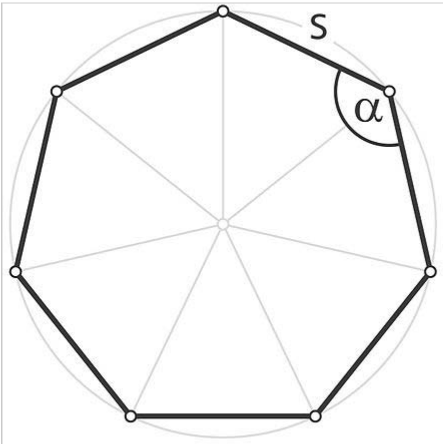
Siebeneck

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Das **Siebeneck** (auch **Heptagon** von griech. *heptagon* von *hepta* = sieben) ist eine geometrische Figur. Es gehört zur Gruppe der *Vielecke* (Polygone). Es ist definiert durch sieben Punkte. Sofern nichts anderes gesagt wird, ist von einem ebenen, regelmäßigen Siebeneck die Rede (siehe Bild), dessen sieben Seiten gleich lang sind und dessen sieben Eckpunkte auf einem gemeinsamen Umkreis liegen.



Regelmäßiges Siebeneck

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Zusammenhänge

Formel für Winkelberechnungen

Die Summe der Innenwinkel des Siebenecks beträgt stets 900° und ergibt sich aus einer allgemeinen Formel für Polygone, in der für die Variable n die Anzahl der Eckpunkte des Polygons eingesetzt werden muss (in diesem Fall: $n = 7$):

$$\sum \alpha = (n-2) \cdot 180^\circ = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

Der Winkel, den zwei benachbarte Seitenkanten im ebenen, regelmäßigen Siebeneck miteinander einschließen, beträgt (wiederum nach einer allgemeinen Formel für regelmäßige Polygone):

$$\alpha = \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^\circ = \frac{5}{7} \cdot 180^\circ \approx 128{,}57^\circ$$

Formel für die Fläche A

Ein Siebeneck besitzt einen eindeutig bestimmbaren Flächeninhalt, welcher sich stets durch Zerlegen in

Dreiecke berechnen lässt. Die Fläche des regelmäßigen Siebenecks beträgt das Siebenfache der Fläche eines jener Dreiecke, die von seinem Mittelpunkt und je zwei benachbarten Eckpunkten aufgespannt werden.

$$A = \frac{7}{4} \cdot s^2 \cdot \tan \frac{450^\circ}{7} \approx 3{,}63391 \cdot s^2$$

oder mit dem Umkreisradius:

$$A = \frac{7}{2} \cdot r_u^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{7} \approx 2{,}73641 \cdot r_u^2$$

Formel für die Seitenlänge s

$$s = 2 \cdot r_u \cdot \sin \frac{180^\circ}{7} \approx r_u \cdot 0{,}867767478235$$

Näherungskonstruktionen

Ein regelmäßiges Siebeneck kann nicht mit Zirkel und Lineal exakt konstruiert werden, da es kein konstruierbares Polygon ist.

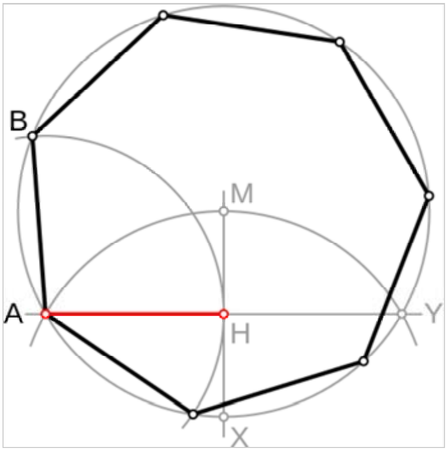
Für die Praxis gibt es einige ausreichend genaue Näherungskonstruktionen.

Es geht darum, eine Strecke zu erhalten, welche möglichst genau das 0,86776747823-Fache eines gegebenen Radius ist.

Erste Näherung

Eine sehr einfache Näherungskonstruktion ist in folgender Zeichnung dargestellt:

1. Vom Mittelpunkt des Umkreises zeichnet man eine Gerade, die den Umkreis im Punkt X schneidet.
2. Dann zeichnet man einen Kreis um X, der durch M verläuft und den Umkreis in den Punkten A und Y schneidet.
3. Die Gerade AY schneidet die Strecke $\overline{MX}$ im Halbierungspunkt H.
4. Die rote Strecke $\overline{AH}$ ist eine gute Näherung für die Seitenlänge des Siebenecks.
5. Die Eckpunkte B bis G erhält man durch Abschlagen der Strecke $\overline{AH}$.



Konstruktion eines Siebenecks

Genau dieselbe Streckenlänge lässt sich folgendermaßen konstruieren:

1. Konstruiere das dem Umkreis einbeschriebene regelmäßige (gleichseitige) Dreieck.
2. Die Hälfte einer Dreiecksseite nimm als Näherung für die Seite des Siebenecks.

In dieser Form war sie bereits dem im 10. Jahrhundert in Bagdad wirkenden Gelehrten Abu l-Wafa bekannt.[1]

Aus dem rechtwinkligen Dreieck AHM errechnet sich:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{MA}^2 - \overline{MH}^2}$$

Mit

$\overline{MA} = r$; $\overline{MH} = \frac{1}{2}r$ und $\overline{AH} := s$

$$s = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2}$$

$$s = r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$s \approx r \cdot 0{,}8660254$$

Bei dieser Konstruktion beträgt der Fehler

$$f = \frac{0{,}8660254 - 0{,}8677675}{0{,}8677675} \approx -0{,}002$$

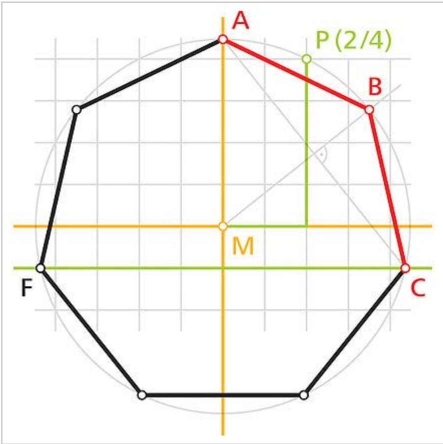
Die mit dieser Konstruktion gewonnene Seitenlänge ist etwas zu kurz und beträgt 99,8 Prozent des wahren Wertes. Oder anders formuliert: Ab einem Umkreisradius von ungefähr 57,4 cm beträgt der Fehler in der Seitenlänge mehr als einen Millimeter.

Zweite Näherung

Mit Koordinatensystem

Eine etwas aufwändigere, aber genauere Näherungskonstruktion ist in folgender Zeichnung dargestellt:

1. In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem zeichnet man einen Kreis, der seinen Mittelpunkt im Ursprung $(0/0)$ hat und genau durch den Punkt P mit den Koordinaten $(2/4)$ verläuft.
2. Der Schnittpunkt der positiven y-Achse mit der Kreislinie wird als Eckpunkt A des regelmäßigen Siebenecks festgelegt.
3. Die Gerade $y = -1$ (horizontale grüne Linie) schneidet die Kreislinie in unmittelbarer Nähe der Eckpunkte C und F.
4. Wenn man die Streckensymmetrale der Strecke AC mit dem Kreis schneidet, erhält man eine Näherung für den Eckpunkt B.
5. Die rote Strecke $\overline{AB}$ oder $\overline{BC}$ ist eine sehr gute Näherung für die Seitenlänge des regelmäßigen Siebenecks.
6. Die Eckpunkte D, E und G erhält man durch Spiegelung oder Abschlagen der Seitenlänge am Umkreis.



Alternative Konstruktion eines Siebenecks

Bezeichnet man den Umkreisradius mit r, den Abstand der $\overline{FC}$ von M mit h und substituiert $q = \frac{h}{r}$, so ergibt sich bei dieser Konstruktion:

(1) $\overline{AB} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-q}}$,

und mit den Werten

(2) $r = \sqrt{20}; h = 1; q = \frac{1}{\sqrt{20}}$

ergibt sich:

(3) $\overline{AB} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{20}}}}$

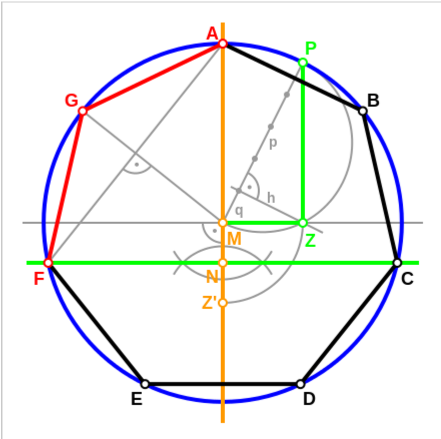
(3a) $\overline{AB} \approx r \cdot 0{,}868269253$

Die mit dieser Konstruktion gewonnene Seitenlänge ist also etwas zu lang, der Fehler beträgt näherungsweise 0,00057821133, also 0,0578 Prozent. Oder anders formuliert: Bei einem Umkreisradius von ungefähr 199,3 cm beträgt der Fehler in der Seitenlänge einen Millimeter.

Mit gegebenem Umkreis

Ein Nachteil der o.g. Konstruktion besteht darin, dass nicht von einem direkt gegebenen Radius ausgegangen wird. Will man vom Radius ausgehen, so besteht die Aufgabe darin, den zum gegebenen Radius gehörenden Abstand d zwischen der Gerade $\overline{CF}$ und dem Mittelpunkt M (das ist die Längeneinheit der Konstruktion mit geg. Koordinatensystem) zu finden.

Herleitung des Abstands d



Zweite Näherungskonstruktion bei gegebenem Umkreisradius

Aus der Konstruktion mit Koordinatensystem und der Zeichnung kann man ablesen:

$$\overline{MN} = d$$
$$\overline{MZ'} = \overline{MZ} = 2d$$
$$\overline{ZP} = 2 \cdot \overline{MZ} = 4d$$

Damit gilt

$$\frac{\overline{PZ}}{\overline{ZM}} = \frac{4d}{2d} = 2$$

Außerdem ist nach dem Satz des Pythagoras noch

$$\overline{MP} = r = \sqrt{20} \cdot d$$

Im rechtwinkligen Dreieck MZP gilt nach dem Kathetensatz

$\overline{ZP}^2 = r \cdot p$ und $\overline{MZ}^2 = r \cdot q$

Der Quotient ist gemäß obiger Darstellung

$$\frac{\overline{ZP}^2}{\overline{MZ}^2} = \frac{p}{q}$$

und damit

$$\frac{p}{q} = 2^2 = 4$$

wobei p und q die Hypotenusenabschnitte sind. Ihre Längen betragen 4/5 und 1/5 des Radius. Damit lässt sich der Punkt Z konstruieren und somit der Abstand d festlegen.

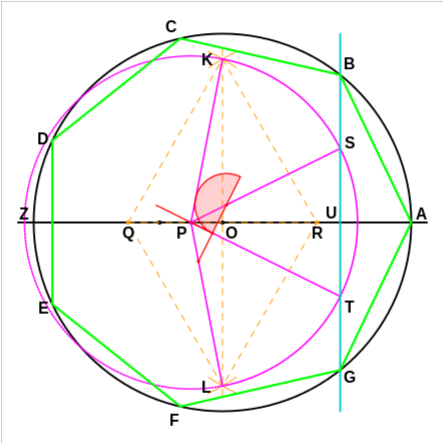
Konstruktion

- Konstruiere über dem Radius $r = \overline{MP}$ einen Thaleskreis.
- Errichte im Abstand von $\frac{1}{5}r$ von M das Lot. Der so gewonnene Punkt auf dem Thaleskreis ist der Punkt Z des rechtwinkligen Dreiecks MZP (entspricht Punkt (2/0) bei der Konstruktion mit Koordinatensystem).
- Konstruiere durch M die Parallele zur längeren Kathete $\overline{ZP}$. Der Schnittpunkt mit dem Umkreis ist der Punkt A.
- Trage die Strecke $\overline{MZ}$ auf die Gerade AM von M aus in die Gegenrichtung ab (Z', entspricht Punkt (0/-2) bei der Konstruktion mit Koordinatensystem).
- Den Abstand d = $\overline{MN}$ erhält man durch Halbieren Strecke $\overline{MZ'}$
- Konstruiere die Gerade senkrecht zu $\overline{AZ'}$ durch N. die Schnittpunkte mit dem Umkreis sind die Punkte C und F
- Der Rest folgt wie bei der Konstruktion mit Koordinatensystem.

Exakte Konstruktion mittels Dreiteilung eines Winkels

Nimmt man zu den klassischen (euklidischen) Werkzeugen Zirkel und Lineal noch ein Extrawerkzeug zur Dreiteilung des Winkels, wie z.B. einem Tomahawk so kann das Siebeneck jedoch exakt konstruiert werden.[2]

- Konstruiere einen Kreis - den späteren Umkreis des Siebenecks - um einen Mittelpunkt (O) auf einer Grundlinie (AZ). Einer der Schnittpunkte mit dem Kreis ist der erste Eckpunkt (A) des späteren Siebenecks.
- Halbiere die beiden Radien des ersten Durchmessers (Punkte Q und R)
- Errichte auf der so erhaltenen Strecke zwei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge gleich dem Kreisradius. (Man erhält Punkte K und L).
- Trage auf der Grundlinie (AZ) vom Mittelpunkt aus 1/6 des Radius in die dem auf der Grundlinie liegenden Eckpunkt entgegengesetzte Richtung ab (Punkt P).
- Zeichne um den so erhaltenen Punkt einen Hilfskreis durch die beiden nicht auf der Grundlinie liegenden Ecken der gleichseitigen Dreiecke.



Konstruktion mit Tomahawk (rot)

- Zeichne in diesen Kreis die beiden Radien zu diesen beiden Punkten ein.
- Teile den von diesen Radien gebildeten Winkel unter Verwendung des Extrawerkzeugs in drei Teile (z.B. Tomahawk, in der Zeichnung rot dargestellt) und zeichne die so gewonnenen Geraden ein. Sie schneiden den Hilfskreis in zwei weiteren Punkten (Punkte S und T).
- Die Gerade durch diese Punkte - sie liegt senkrecht zur Grundlinie - schneidet den Umkreis des Siebenecks an den zum ersten Eckpunkt (A) benachbarten Ecken des Siebenecks (Punkte B und G).
- Ergänze die noch fehlenden Ecken durch Abtragen der Seiten.

Verwendung des Siebenecks in der Praxis

Das 20-Eurocent-Stück hat sieben Einkerbungen, um Blinden die Unterscheidung von anderen Münzen zu erleichtern (Spanische Blume). Die alte spanische 200-Peseten-Münze zeigt auf beiden Seiten ein Siebeneck, ebenso haben die britischen 20-Pence- und 50-Pence-Stücke eine siebeneckige Form.

In der Architektur findet das Siebeneck sehr selten Verwendung. Der Konzertsaal „Hegelsaal“ im Kultur- und Kongresszentrum Liederhalle in Stuttgart hat ebenso wie seine Glaskuppel einen Grundriss in Form eines regelmäßigen Siebenecks. Weitere Beispiele sind das fürstliche Mausoleum in Stadthagen, der Glockenturm der Kirche Maria am Gestade in Wien oder das Schiff der Dorfkirche Ketzür.

Die Diagonalen des regelmäßigen Siebenecks bilden das Heptagramm (siebenzackiger Stern), das als Symbol in der Esoterik populär ist.

Sternmotoren wurden meistens als 5-, 7- oder 9-Zylinder gebaut.

Vorkommen

Es gibt Fullerene (Kohlenstoffmoleküle), die siebeneckige Unterstrukturen aufweisen;[3] die chemische Verbindung Azulen sowie die Stoffgruppen der Tropolone, Benzodiazepine und weitere cyclische Verbindungen enthalten Siebenringe.

Quellen

1. C.J. Scriba, P. Schreiber *5000 Jahre Geometrie,* Verlag Springer Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage (2005) ISBN 3-540-22471-8
2. Andrew M. Gleason: *Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon (http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/ne01/jyt/linkjstor/regular/7.pdf)* (PDF-Datei, 860 kB), The American Mathematical Monthly 95, März 1988, S. 185–194 (englisch)
3. E. Albertazzi, C. Domene, P. W. Fowler, T. Heine, G. Seifert, C. Van Alsenoy and F. Zerbetto: *Pentagon adjacency as a determinant of fullerene stability (http://www.rsc.org/ej/CP/1999/a901600g.pdf),* Phys. Chem. Chem. Phys., 1999, 1, 2913-2918.

Weblinks

Commons: Siebenecke (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Heptagons?uselang=de) – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien
Wiktionary: Siebeneck – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen
Wikibooks: Siebeneck – Lern- und Lehrmaterialien

- Weitere mathematische Details zum Siebeneck (http://www.mathematische-basteleien.de/siebeneck.htm)

Von „https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Siebeneck&oldid=141941530“

Kategorie: Polygon

- Diese Seite wurde zuletzt am 10. Mai 2015 um 15:58 Uhr geändert.
- Abrufstatistik