(Mathematik: Schulmathematik: Planimetrie: Polygonkonstruktionen: Siebeneck)

Siebeneck

Aus Wikibooks

Mathematik → Schulmathematik → Planimetrie → Polygonkonstruktionen

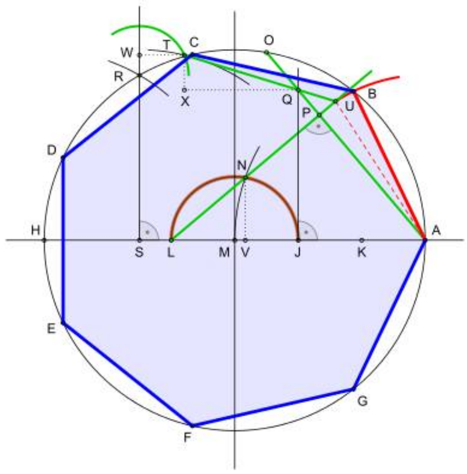
Inhaltsverzeichnis

Siebeneck (Heptagon)

Näherungskonstruktion (!) für das regelmäßige Siebeneck, auch mit Zirkel und Lineal ohne Maßeinteilung darstellbar.

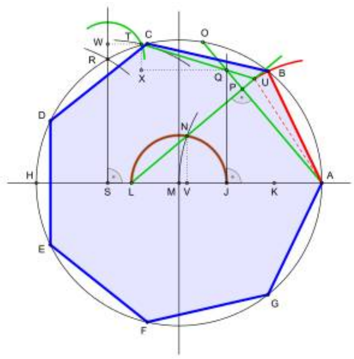
Die gepunkteten Linien mit den daraufliegenden Punkten, dienen als Hilfe für die Berechnung der Seite des Siebenecks.

Konstruktion



1. Zeichne um einen Punkt **M** einen Kreis - den späteren Umkreis des Siebenecks - mit Radius **r**.
2. Zeichne zwei zueinander senkrechte Geraden durch den Mittelpunkt. Einer der Schnittpunkte mit dem Kreis ist die erste Ecke **A** des Siebenecks.
3. Teile die Strecke $\overline{\mathbf{AM}}$ in drei Teile, es ergeben sich die Punkte **J** und **K**
4. Zeichne einen Halbkreis um den Mittelpunkt **M** mit Radius $\overline{\mathbf{MJ}}$, er schneidet die Strecke $\overline{\mathbf{MH}}$ im Punkt **L**.
5. Zeichne einen Kreisbogen um Punkt **A** mit Radius **r** ab Punkt **M**, er schneidet den Halbkreis im Punkt **N**.
6. Zeichne eine Gerade ab Punkt **L** durch Punkt **N** etwas über den Umkreis hinaus.
7. Errichte eine Senkrechte zur Gerade, die durch Punkt **N** geht, ab Punkt **A** bis sie den Umkreis im Punkt **O** schneidet, es ergibt sich der Schnittpunkt **P**.
8. Errichte eine Senkrechte zur Strecke $\overline{\mathbf{AM}}$ im Punkt **J** bis sie die Strecke $\overline{\mathbf{AO}}$ im Punkt **Q** schneidet.
9. Zeichne einen Kreisbogen um Punkt **H** mit Radius **r**, es ergibt sich der Schnittpunkt **R** auf dem Umkreis.
10. Errichte eine Senkrechte zur Strecke $\overline{\mathbf{MH}}$ durch Punkt **R**, sie halbiert die Strecke $\overline{\mathbf{MH}}$ im Punkt **S**.
11. Zeichne einen Kreisbogen um Punkt **R** mit Radius $\overline{\mathbf{OQ}}$.
12. Zeichne einen Kreisbogen um Punkt **S** mit Radius **r** bis er den Kreisbogen um Punkt **R** schneidet, es ergibt sich der Schnittpunkt **T**
13. Zeichne eine Gerade ab Punkt **T** durch Punkt **Q** bis zur Gerade, die durch Punkt **N** geht, es ergibt sich der Schnittpunkt **U**
14. Zeichne einen Kreisbogen um Punkt **A** mit Radius $\overline{\mathbf{AU}}$ ab Punkt **U**, er schneidet den Umkreis im Punkt **B**.
15. Verbinde den Punkt **A** mit Punkt **B**, die rote Strecke $\overline{\mathbf{AB}}$ ist die gesuchte Seite des Siebenecks.
16. Trage die Strecke $\overline{\mathbf{AB}}$, ab Punkt **B**, fünfmal mit dem Zirkel auf dem Umkreis ab.
17. Verbinde die benachbarten Eckpunkte miteinander, somit ergibt sich das Siebeneck **ABCDEFG**

Fehler



Bei einem Umkreis mit Radius r = 1:

- Konstruierte Siebeneckseite **s** = 0,867767268512597... [LE]
- Soll-Siebeneckseite = $\mathbf{s_S}$ = 2 • sin(180°/7) = 0,867767478235116... [LE]
- Absoluter Fehler = **s** − $\mathbf{s_S}$ = -0,000000209722519... = -2,097...E-7 [LE]

Bei einem Umkreis mit Radius r = 10 km wäre die Abweichung ≈ -2,1 mm

Berechnung

Gleichschenkliges Dreieck AMN

1.0 $\triangle AMN$
Gegeben: $\overline{AM} = r$; $\overline{AN} = r$; $\overline{MN} = \frac{r}{3}$

1.1 $\angle MAN$ Mit dem Kosinussatz ergibt sich:

$$cos(\angle MAN) = 1 - \frac{(\frac{r}{3})^2}{2r^2} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

$$\alpha = \angle MAN = \arccos\left(\frac{17}{18}\right) \approx 19{,}1881364537209°$$

1.2 Höhe zur Seite $\overline{AM}$

$$\overline{VN} = r\, sin\alpha = r\sqrt{1-\left(\frac{17}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{18}r \approx 0{,}3286710990610898$$

1.3 $\overline{MV} = \sqrt{\overline{NM}^2 - \overline{NV}^2} = \frac{1}{18}r$

Rechtwinkeliges Dreieck LJN

2.0 $\triangle LJN$
Gegeben:

- $\overline{MV} = \frac{1}{18}r$ (aus 1.3)
- $\overline{LM} = \frac{1}{3}r$
- $\overline{JL} = \frac{2}{3}r$
- $\overline{NV} = \frac{\sqrt{35}}{18}r$ (aus 1.2)

2.1 $\overline{LV} = \overline{LM} + \overline{MV} \Rightarrow \overline{LV} = \frac{7}{18}r$

2.2 Hypotenuse $\overline{LN} = \sqrt{\overline{LV}^2 + \overline{NV}^2} \Rightarrow \overline{LN} = \sqrt{\frac{7}{27}}\,r$

Winkel $\beta = \angle JLN = \angle ALP$ ergibt sich aus

2.3 $\beta = \arcsin\frac{\overline{NV}}{\overline{LN}} = \arcsin\left(\frac{\frac{\sqrt{35}}{18}}{\sqrt{\frac{7}{27}}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)$

$\beta \approx 40{,}202965886569769°$

2.4 $\overline{JN} = \sqrt{\overline{LJ}^2 - \overline{LN}^2} = \sqrt{\frac{5}{27}}\,r$

Rechtwinkeliges Dreieck LAP

3.0 $\triangle LAP$
Gegeben:

- $\triangle LAP$ ähnlich zu $\triangle LJN$ (aus 2.0)
- $\overline{AL} = \frac{4}{3}r = 2\overline{LJ}$
- $\overline{NL} = \sqrt{\frac{7}{27}}\,r$ (aus 2.2)
- $\overline{JN} = \sqrt{\frac{5}{27}}\,r$ (aus 2.4)

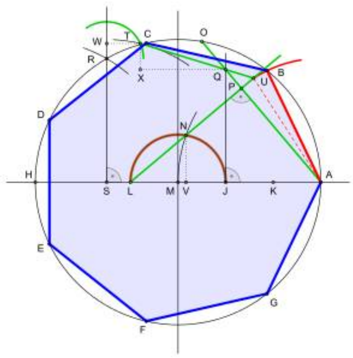
3.1 $\overline{PL} = 2\overline{NL} \Rightarrow \overline{PL} = 2\sqrt{\frac{7}{27}}\,r$

3.2 $\overline{AP} = 2\overline{JN} \Rightarrow \overline{AP} = 2\sqrt{\frac{5}{27}}\,r$

3.3 $\gamma = \angle PAL = 90° - \beta$
oder:

$\gamma = \arccos\sqrt{\frac{5}{12}} = \arcsin\sqrt{\frac{7}{12}}$

3.3 $\gamma \approx 49{,}797034113430231°$



Rechtwinkeliges Dreieck JAQ

4.0 $\triangle JAQ$

Gegeben:

- $\overline{JA} = \frac{2}{3}r$
- $\angle QAJ = \angle PAL = \gamma$ (aus 3.3)

4.1

$\overline{QJ} = \overline{JA}\tan(\gamma) = \overline{JA}\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$

$\overline{QJ} = \overline{JA}\frac{\sqrt{\frac{7}{12}}}{\sqrt{\frac{5}{12}}}$

$\overline{QJ} = \overline{JA}\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}r$

$\overline{QJ} \approx 0{,}788810637746615r$

4.2.

$\overline{AQ} = \overline{JA}\,\frac{\overline{JA}}{\cos\gamma} = \overline{JA}\sqrt{\frac{12}{5}}$

$$\overline{AQ} = \frac{2\sqrt{12}}{3\sqrt{5}}r = \sqrt{\frac{16}{15}}r \approx 1,032795558988645r$$

Gleichseitiges Dreieck HMR

5.0 $\triangle HMR$
Gegeben:

- $\overline{HM} = r$
- $\overline{SM} = \frac{1}{2}r$
- $\angle RMS = \delta = 60°$

5.2 Höhe:
$$\overline{RS} = \overline{HM} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r \approx 0,866025403784439 \cdot r$$

Rechtwinkeliges Dreieck HAO

6.0 $\triangle HAO$
Gegeben:

- $\triangle HAO$ ähnlich $\triangle LJN$ (aus 2.0) also $\frac{\overline{HA}}{\overline{LJ}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{JN}}$
- $\overline{AQ} = \sqrt{\frac{16}{15}}r$ (aus 4.2)
- $\overline{HA} = 2r$; $\overline{LJ} = \frac{2}{3} \cdot r$; $\overline{JN} = \sqrt{\frac{5}{27}} \cdot r$ (aus 2.4)

6.1 $\overline{AO} = \frac{\overline{JN} \cdot \overline{HA}}{\overline{LJ}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{27}} \cdot 2}{\frac{2}{3}}r = 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{27}}r = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot r \approx 1{,}290994448735805 \cdot r$

6.2 $\overline{QO} = \overline{AO} - \overline{AQ} = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{16}{15}}\right)r = \left(\sqrt{\frac{25}{15}} - \sqrt{\frac{16}{15}}\right)r = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{16}}{\sqrt{15}}r = \frac{1}{\sqrt{15}}r \approx 0{,}258198889747161r$

Stumpfwinkeliges Dreieck RST

7.0 $\triangle RST$
Gegeben:

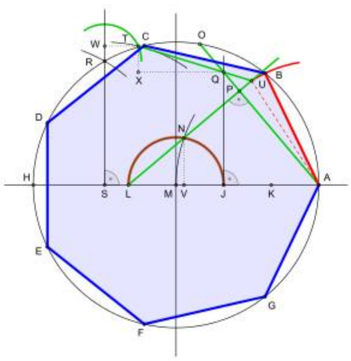
- $\overline{TR} = \overline{QO} = \frac{1}{\sqrt{15}}r$ (aus 6.2)
- $\overline{ST} = r$
- $\overline{RS} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ (aus 5.2)

7.1 Nach dem Kosinussatz gilt:

$$\cos(\angle SRT) = \cos(\epsilon) = \frac{\overline{TR}^2 + \overline{RS}^2 - \overline{ST}^2}{2\overline{TR} \cdot \overline{RS}} = \frac{\frac{1}{15} + \frac{3}{4} - 1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{4+45-60}{60}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{-11\sqrt{5}}{60}$$
$$\epsilon = \arccos\left(\frac{-11\sqrt{5}}{60}\right) \approx 114{,}201429828962958°$$

7.2 Berechnung $\angle WTR$ und $\cos \angle WTR$

(Berechnung indirekt, um den arithm. Ausdruck zu erhalten)
$\angle WTR = \zeta = \epsilon - 90°$
Mit dem Additionstheorem:
$\cos(x - y) = \cos x \ \cos y + \sin x \ \sin y$
ergibt sich:
$$\cos\zeta = \sin\epsilon = \sqrt{1 - \cos^2(\epsilon)} = \sqrt{1 - \cos^2(\epsilon)} = \frac{\sqrt{2995}}{60}$$
$\zeta \approx 24{,}201429828962958$



7.3 Höhe $\overline{WT}$ von $\triangle RST$ zur Seite $\overline{RS}$

$$\overline{WT} = \overline{TR} \cdot \cos\zeta = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{2995}}{60} \cdot r = \frac{\sqrt{599}}{60\sqrt{3}} \cdot r$$
$$\overline{WT} \approx 0{,}235505759935852 \cdot r$$

Rechtwinkeliges Dreieck TWR

8.0 $\triangle TWR$
Gegeben:

- $\overline{RT} = \overline{QO} = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot r$ (aus 6.2)
- $\overline{WT} = \frac{\sqrt{599}}{60\sqrt{3}} \cdot r$ (aus 7.3)

8.1

$$\overline{WR} = \sqrt{\overline{RT}^2 - \overline{WT}^2} = \sqrt{\frac{1}{15} - \frac{599}{60^2 \cdot 3}} \cdot r = \sqrt{\frac{720 - 599}{60^2 \cdot 3}} \cdot r = \sqrt{\frac{121}{60^2 \cdot 3}} \cdot r = \frac{11}{60\sqrt{3}} \cdot r$$

$\overline{WR} \approx 0{,}105847549351431 \cdot r$

Rechtwinkeliges Dreieck QXT

9.0 $\triangle QXT$

Gegeben:

- $\overline{WT} = \frac{\sqrt{599}}{60\sqrt{3}} \cdot r$ (aus 7.3)
- $\overline{SJ} = \frac{5}{6} \cdot r$ (aus Zeichnung)

9.1

$\overline{XQ} = \overline{SJ} - \overline{WT} = \left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{599}}{60\sqrt{3}}\right) \cdot r = \frac{50\sqrt{3} - \sqrt{599}}{60\sqrt{3}} \cdot r$

$\overline{XQ} \approx 0{,}597827573397482 \cdot r$

9.2

$\overline{XT} = \overline{RS} + \overline{WR} - \overline{QJ}$

mit

- $\overline{RS} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$ (aus 5.2)
- $\overline{WR} = \frac{11}{60\sqrt{3}} \cdot r$ (aus 8.1)
- $\overline{QJ} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} \cdot r$ (aus 4.1)

ergibt sich:

$\overline{XT} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{60\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}\right) \cdot r = \left(\frac{90+11}{60\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}\right) \cdot r = \left(\frac{101 - 8\sqrt{105}}{60\sqrt{3}}\right) \cdot r$

$\overline{XT} \approx 0{,}183062315389255 \cdot r$

9.3 Berechnung $\angle XTQ = \eta$

$\tan(\eta) = \frac{\overline{XQ}}{\overline{XT}} = \frac{50\sqrt{3} - \sqrt{599}}{101 - 8\sqrt{105}}$

$\eta = \arctan\left(\frac{50\sqrt{3} - \sqrt{599}}{101 - 8\sqrt{105}}\right) = \arctan\left(\frac{p}{q}\right)$ mit $p = 50\sqrt{3} - \sqrt{599} \quad ; \quad q = 101 - 8\sqrt{105}$

$\eta \approx 72{,}974753574847806^\circ$

Rechtwinkeliges Dreieck QPU

10.0 $\triangle QPU$

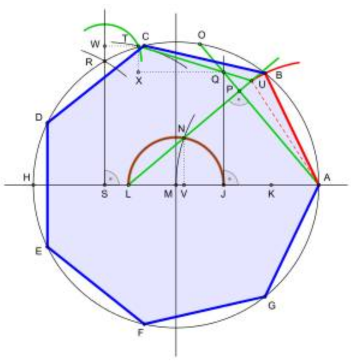
Gegeben:

- $\overline{AQ} = \sqrt{\frac{16}{15}}\, r$ (aus 4.2)
- $\overline{AP} = 2\sqrt{\frac{5}{27}}\, r$ (aus 3.2)
- $\overline{PL} = 2\sqrt{\frac{7}{27}}\, r$ (aus 3.1)
- $\tan\eta = \frac{50\sqrt{3} - \sqrt{599}}{101 - 8\sqrt{105}}$ (aus 9.3)

10.1

$\overline{QP} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \left(\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{15}} - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{27}}\right) r = \left(\frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 5}{\sqrt{27 \cdot 5}}\right) r = \frac{2}{\sqrt{135}} \cdot r$

$\overline{QP} \approx 0{,}172132593164774 \cdot r$



10.2 Berechnung $\tan\angle PQU = \theta$

$\tan\beta = \frac{\overline{AP}}{\overline{LP}} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{27}}}{2\sqrt{\frac{7}{27}}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

$\theta = \eta - \beta$

Mit dem Additionstheorem

$\tan(\eta - \beta) = \frac{\tan\eta - \tan\beta}{1 + \tan\eta\ \tan\beta}$

ergibt sich:

$\tan\theta = \frac{\frac{50\sqrt{3} - \sqrt{599}}{101 - 8\sqrt{105}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}}{1 + \frac{50\sqrt{3} - \sqrt{599}}{101 - 8\sqrt{105}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}} = \frac{\frac{p}{q} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}}{1 + \frac{p}{q} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}}$ mit $p = 50\sqrt{3} - \sqrt{599} \quad ; \quad q = 101 - 8\sqrt{105}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{7} \cdot (50\sqrt{3} - \sqrt{599}) - \sqrt{5} \cdot (101 - 8\sqrt{105})}{\sqrt{5} \cdot (50\sqrt{3} - \sqrt{599}) + \sqrt{7} \cdot (101 - 8\sqrt{105})} = \frac{\sqrt{7} \cdot p - \sqrt{5} \cdot q}{\sqrt{5} \cdot p + \sqrt{7} \cdot q}$ mit $p = 50\sqrt{3} - \sqrt{599} \quad ; \quad q = 101 - 8\sqrt{105}$

$\tan\theta \approx 0{,}643759341824444$

$\theta \approx 32{,}771787688277979^\circ$

10.3

$$\overline{PU} = \overline{QP} \cdot \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{135}} \cdot \frac{\sqrt{7}\cdot(50\sqrt{3}-\sqrt{599})-\sqrt{5}\cdot(101-8\sqrt{105})}{\sqrt{5}\cdot(50\sqrt{3}-\sqrt{599})+\sqrt{7}\cdot(101-8\sqrt{105})} \cdot r$$

$$\overline{PU} = \frac{2}{\sqrt{135}} \cdot \frac{\sqrt{7}\cdot p-\sqrt{5}\cdot q}{\sqrt{5}\cdot p+\sqrt{7}\cdot q} \cdot r \text{ mit } p = 50\sqrt{3}-\sqrt{599} \quad ; \quad q = 101-8\sqrt{105}$$

$$\overline{PU} \approx 0{,}110811964882290 \cdot r$$

Rechtwinkeliges Dreieck APU

11.0 $\triangle APU$

Gegeben:

- $\overline{AP} = 2\sqrt{\frac{5}{27}}\, r$ (aus 3.2)
- $\overline{PU} = \frac{2}{\sqrt{135}} \cdot \frac{\sqrt{7}\cdot(50\sqrt{3}-\sqrt{599})-\sqrt{5}\cdot(101-8\sqrt{105})}{\sqrt{5}\cdot(50\sqrt{3}-\sqrt{599})+\sqrt{7}\cdot(101-8\sqrt{105})} \cdot r$ (aus 10.3)

11.1

Die Länge der Siebeneckseite entspricht $\overline{AU}$ und beträgt:

$$\overline{AU} = \sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PU}^2} = \sqrt{\frac{20}{27}+\frac{4}{135}\cdot\frac{7(8099-100\sqrt{1797})+5(16921-1616\sqrt{105})-2\sqrt{35}(50\sqrt{3}-\sqrt{599})(101-8\sqrt{105})}{5(8099-100\sqrt{1797})+7(16921-1616\sqrt{105})+2\sqrt{35}(50\sqrt{3}-\sqrt{599})(101-8\sqrt{105})}} \cdot r$$

$$s = \overline{AU} \approx 0{,}86776726851259754370992295342964\, r$$

Vereinfacht:

$$s = \overline{AU} = \sqrt{\frac{20}{27}+\frac{4}{135}\cdot\frac{7p^2+5q^2-2\sqrt{5\cdot 7}\cdot p\cdot q}{5p^2+7q^2+2\sqrt{5\cdot 7}\cdot p\cdot q}} \cdot r \text{ mit } p = 50\sqrt{3}-\sqrt{599} \quad ; \quad q = 101-8\sqrt{105}$$

Weblinks

Siebeneck, Näherungskonstruktion

Abgerufen von „https://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Mathematik:_Schulmathematik:_Planimetrie:_Polygonkonstruktionen:_Siebeneck&oldid=780908“

- Diese Seite wurde zuletzt am 24. Januar 2016 um 13:39 Uhr geändert.