
17 gleiche Ecken und Kanten mit Zirkel und Lineal

Hans Vollmayr

Nach zwei Jahrtausenden griechischer Geometrie war der junge Carl Friedrich Gauß der erste, dem es gelang, mit Zirkel und Lineal etwas grundlegend Neues zu konstruieren: das regelmäßige Siebzehneck. Hier wird erläutert, was Konstruierbarkeit bedeutet, welche geometrischen Figuren sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen und wie man das Zeichenwerkzeug sogar als analogen Taschenrechner verwenden kann. Wir folgen der Argumentation von Gauß, in der er die Gedankengänge Euklids mit denen Descartes verbindet. Schließlich wird Gauß' Beweis für die Konstruierbarkeit des Siebzehnecks schrittweise diskutiert, wobei die einzelnen Schritte sowohl als Rechnung als auch praktisch auf dem Zeichenpapier nachvollzogen werden.

Was bedeutet „konstruierbar“?

In seiner ursprünglichen Form bedeutet die Frage nach der Konstruierbarkeit geometrischer Gebilde die Frage danach, ob sich das jeweilige Objekt mit Zirkel und Lineal exakt zeichnen lässt. Ein einfaches konstruierbares Beispiel ist ein Quadrat. Es lässt sich mit den folgenden Schritten konstruieren:

- I. Zeichne eine gerade Linie.
- II. Konstruiere eine darauf senkrecht stehende Linie (diese Konstruktion einer Senkrechten wird weiter unten im Detail vorgeführt).
- III. Setze die Nadel des Zirkels in den Kreuzungspunkt und ziehe einen Kreis, der jede der beiden Senkrechten zweimal schneidet.
- IV. Verbinde mit dem Lineal die vier Schnittpunkte zwischen Kreis und den Geraden zu einem Quadrat.

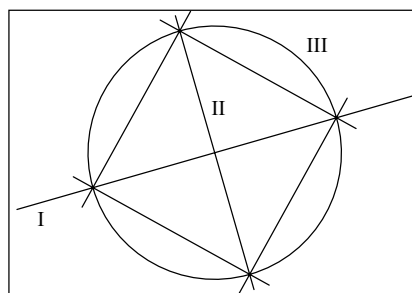


Abb. 11: Konstruktion eines Quadrats

Bei der Konstruktion eines geometrischen Objekts ist es gleichgültig, wie viele Schritte man benötigt – solange man nicht unendlich viele Schritte braucht. Andererseits muss die Konstruktion aber exakt sein. Wir wiederholen deshalb noch einmal die Definition etwas genauer: Ein geometrisches Objekt ist konstruierbar, wenn ein (hypothetischer) absolut exakt arbeitender Zeichner mit (hypothetisch) ebenfalls absolut exakten Zeichenwerkzeugen Zirkel und Lineal das Objekt absolut exakt zeichnen könnte.

Wir sollten noch erläutern, welche Operationen man mit Zirkel und Lineal ausführen kann, d.h. von welchen Operationen man annimmt, dass sie exakt ausgeführt werden können. Das sind die folgenden:

- Mit dem Lineal können wir eine beliebig lange, gerade Linie durch zwei beliebige Punkte zeichnen (natürlich auch durch einen Punkt oder frei, d.h. ohne vorgegebenen Punkt).
- Die Nadel des Zirkels können wir genau in einem vorgegebenen Punkt ansetzen.
- Den Radius des Zirkels können wir genau auf den Abstand zweier vorgegebener Punkte einstellen.

Man beachte, dass das Lineal bei solchen Konstruktionen nicht zum Abmessen verwendet wird.

Griechische Konstruktionen

Schon vor über 2000 Jahren haben sich griechische Mathematiker mit der Frage beschäftigt, welche geometrischen Formen sich konstruieren lassen. Insbesondere haben sie sich für regelmäßige Polygone (Vielecke) interessiert. Das Quadrat ist das regelmäßige Viereck. „Regelmäßig“ bedeutet immer, dass alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind. Sehr einfach ist auch die Konstruktion des regelmäßigen (gleichseitigen) Dreiecks. Außerdem kannten die antiken Wissenschaftler schon die schwierige Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks. Da es einfach ist, mit Zirkel und Lineal nicht nur gerade Linien, sondern auch Winkel zu halbieren, konnten sie auch ein Sechseck, Achteck, Zehneck, Zwölfeck, etc. exakt zeichnen. Aber bis auf diese Erweiterungen schien es ab über das Fünfeck hinaus keine neuen Konstruktionen zu geben.

Dies war der Stand der Erkenntnis, bis der junge Carl Friedrich Gauß auf die Idee kam, sich am Siebzehneck zu versuchen.

Geometrische Hilfskonstruktionen

Bei der Konstruktion des Quadrats haben wir unter anderem eine Senkrechte auf einer bestehenden geraden Linie gezeichnet. Das ist ein typisches Beispiel dafür, wie

man mehrere Schritte zu einer Hilfskonstruktion zusammenfasst. Einige solcher Hilfskonstruktionen werden im Folgenden diskutiert.

Mittelsenkrechte

Gegeben ist eine gerade Linie, auf der zwei Punkte markiert sind (in Abb. 12 fett gedruckt). Zu konstruieren ist eine auf der gegebenen Linie senkrechte Linie, die genau zwischen den beiden markierten Punkten schneidet. Verfahren:

- I. Ziehe zwei Kreise um die vorgegebenen Punkte mit gleichem Radius (ungefähr so groß wie der Abstand zwischen den Punkten).
- II. Verbinde die beiden Schnittpunkte der Kreise.

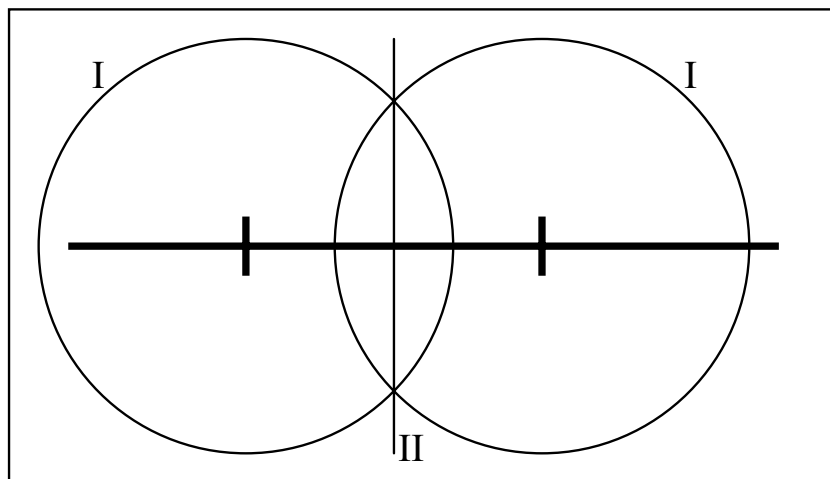


Abb. 12: Konstruktion einer Mittelsenkrechte

Senkrechte durch Punkt

Gegeben ist eine gerade Linie und ein Punkt, der auf der Linie liegen kann, aber nicht muss (in Abb. 13 fett gedruckt). Zu konstruieren ist auf der gegebenen Linie eine senkrechte Linie, die durch den gegebenen Punkt verläuft. Verfahren:

- I. Ziehe einen Kreis um den vorgegebenen Punkt, dessen Radius groß genug ist, so dass er die vorgegebene Linie zweimal schneidet.
- II. Konstruiere eine Mittelsenkrechte zwischen den beiden Schnittpunkten.

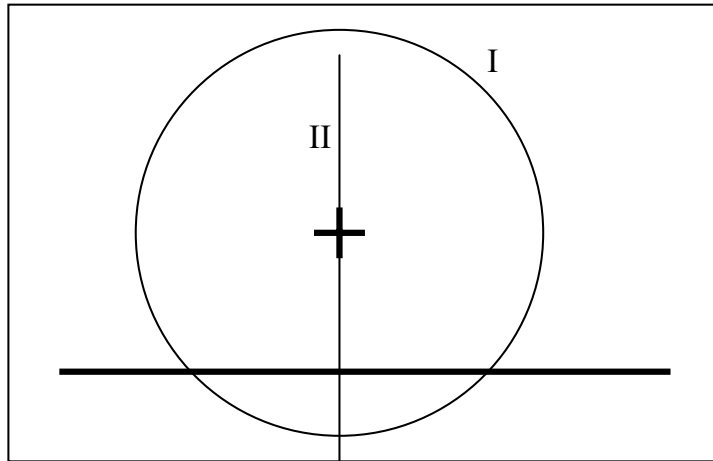


Abb. 13: Senkrechte durch einen vorgegebenen Punkt

Parallele durch Punkt

Gegeben ist eine gerade Linie und ein Punkt, der nicht auf der Linie liegt (in Abb. 14 fett gedruckt). Zu konstruieren ist zu der gegebenen Linie eine parallele Linie, die durch den gegebenen Punkt verläuft. Verfahren:

- I. Konstruiere eine Hilfslinie, die senkrecht zur gegebenen Linie ist.
- II. Konstruiere eine Linie, die senkrecht zur Hilfslinie und durch den gegebenen Punkt verläuft.

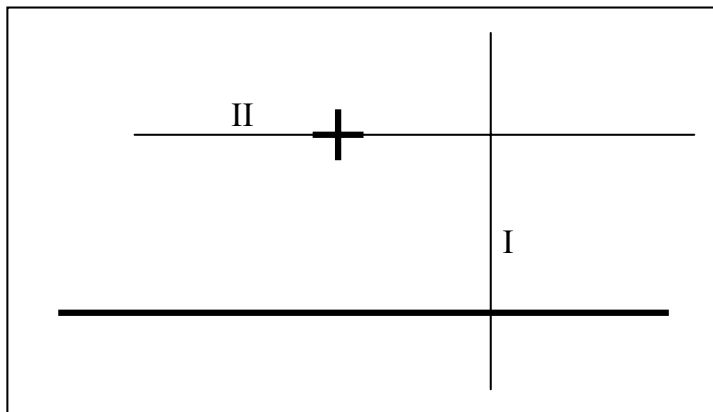


Abb. 14: Parallele durch einen vorgegebenen Punkt

Konstruktion von Zahlen

Mit Zirkel und Lineal kann man nicht nur geometrische Gebilde zeichnen, sondern auch Zahlen konstruieren. Damit ist Folgendes gemeint. Nehmen wir an, jemand gibt uns ein Blatt Papier, auf dem er zwei Punkte markiert hat: Er erklärt dazu, der Abstand zwischen den Punkten sei sein persönliches Längenmaß, das „goldene Zoll“. Nun möchte er (warum auch immer) zwei Punkte im Abstand von genau 1,24 goldenen Zoll konstruieren haben. Können wir diese Aufgabe lösen, d.h. lässt sich die Zahl 1,24 konstruieren? Wie wir sehen werden, ist in diesem Fall die Antwort „ja“. Es gibt aber unendlich viele Zahlen, die sich nicht konstruieren lassen, z.B. die Zahl π , der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1. Das Problem, die Zahl π zu konstruieren, wird übrigens „Quadratur des Kreises“ genannt, und ist bekanntlich zum Synonym von Unlösbarkeit geworden.

Die Konstruktion von Zahlen ist deshalb wichtig, weil man sie verwenden kann, um geometrische Gebilde zu konstruieren. Carl Friedrich Gauß könnte sich z.B. Folgendes überlegt haben: Um ein Siebzehneck zu konstruieren, muss man 17 Punkte in gleichem Abstand auf einer Kreislinie verteilen. Mit anderen Worten: Wir müssen den Winkel $\alpha = 360^\circ/17$ konstruieren. Für einen Mathematiker liegt es nahe, es mit einem rechtwinkligen Dreieck, bei dem die lange Seite die Länge 1 hat, zu versuchen (siehe Abb. 15). Die untere Seite hat eine Länge, die man „Cosinus von α “ nennt und $\cos(\alpha)$ schreibt¹. Gauß kam nun auf den Gedanken, dass man diese Zahl $\cos(\alpha)$ für $\alpha = 360^\circ/17$ konstruieren kann. Damit konnte er dann das ganze Dreieck konstruieren und hatte so den Winkel $\alpha = 360^\circ/17$. Während das Problem der Konstruierbarkeit eines Polygons auf die griechischen Mathematiker, insbesondere Euklid, zurückgeht, kommt Gauß' Lösungsansatz aus der analytischen Geometrie Descartes', die geometrische Objekte untersucht, indem sie die Positionen der entscheidenden Punkte *berechnet*. Zu erkennen, erstens *dass* $\cos(\alpha)$ konstruierbar ist und zweitens *wie* und vor allem *warum* die Konstruktion funktioniert, war Gauß' geniale Leistung.

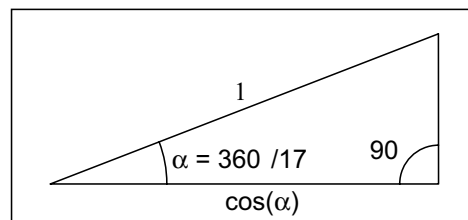


Abb. 15: Rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 360^\circ/17$

¹ Der „Cosinus“ ist natürlich für alle möglichen Winkel definiert, und zwar genauso wie für unseren Fall $\alpha = 360^\circ/17$. Für Winkel zwischen 90° und 270° ist der Cosinus eine negative Zahl.

Rechnen mit Zirkel und Lineal

Die Konstruktion des Siebzehnecks läuft also über den Umweg, die Zahl $\cos(\alpha)$ zu konstruieren. Deshalb wollen wir nun sehen, welche *Zahlen* sich konstruieren lassen. Das geht am leichtesten, wenn wir zuvor noch einen weiteren Schritt gehen. Nehmen wir an, jemand gibt uns ein Blatt Papier, auf dem er drei Punktpaare markiert hat. Ein Punktpaar definiert wieder das goldene Zoll. Die anderen beiden Paare sind im Abstand x bzw. y , jeweils gemessen in goldenen Zoll. Dieses Mal möchte er zwei Punkte im Abstand $x \times y$ konstruiert haben, wie immer nur mit Zirkel und Lineal. Auch diese Aufgabe können wir lösen. Man kann also durch Konstruktion zwei Zahlen multiplizieren. Diskutieren wir zunächst die vier Grundrechenarten.

Addition und Subtraktion

Gegeben sind zwei Abstände x und y , wobei y kleiner als x ist. Gesucht sind $x + y$ und $x - y$.

- I. Zeichne eine gerade Linie und markiere darauf einen Punkt.
- II. Stelle den Radius des Zirkels auf x . Setze die Nadel in den markierten Punkt und schlage einen Kreisbogen, der die gerade Linie schneidet.
- III. Stelle den Radius des Zirkels auf y . Setze die Nadel in den Schnittpunkt und schlage einen Kreis. Die beiden Schnittpunkte des Kreises mit der geraden Linie sind genau $x + y$ bzw. $x - y$ vom markierten Punkt entfernt.

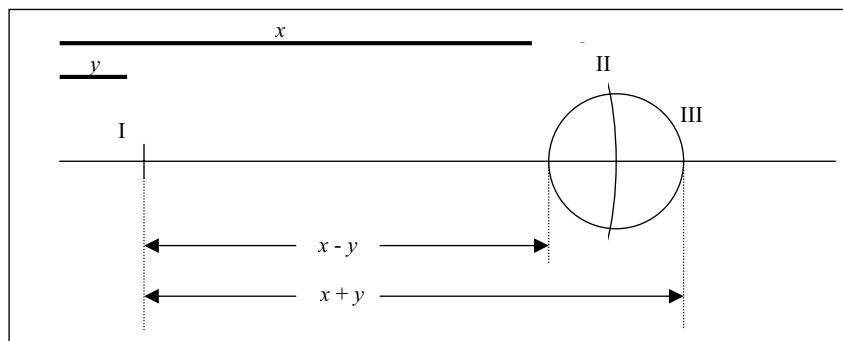


Abb. 16: Addition und Subtraktion mit Zirkel und Lineal

Die eigentliche Konstruktion ist bei der Addition und der Subtraktion viel leichter, als das Verfahren mit Worten zu beschreiben oder die Beschreibung als Text zu lesen ist. Etwas schwieriger wird es bei der Multiplikation und Division.

Multiplikation

Gegeben sind zwei Abstände x und y . Gesucht ist $x \times y$.

- I. Zeichne eine waagerechte und eine senkrechte Linie. Den Schnittpunkt nennen wir O. (Es ist eigentlich nur notwendig, dass sich die Linien schneiden, sie müssen nicht unbedingt genau senkrecht aufeinander stehen.)
- II. Markiere auf der waagerechten Linie einen Punkt A im Abstand x rechts vom Punkt O.
- III. Markiere auf der senkrechten Linie den Punkt B im Abstand 1 (goldenes Zoll) oberhalb von O und den Punkt C im Abstand y oberhalb von O.
- IV. Verbinde die Punkte A und B mit einer geraden Linie.
- V. Zeichne eine Linie die parallel zu A–B verläuft und durch den Punkt C geht. Den Schnittpunkt mit der Waagerechten nennen wir D. Der Abstand zwischen O und D ist $x \times y$.

Man beachte, dass wir bei der Multiplikation auch die Maßeinheit, das goldene Zoll, brauchen (in Schritt III). Dies ist darin begründet, dass wir eigentlich nicht zwei Längen multiplizieren wollen (das Ergebnis wäre nämlich eine Fläche), sondern zwei Zahlen. Bei der Aufgabenstellung haben wir x und y als Längen dargestellt, gemeint ist aber mit x die Zahl, die man erhält, wenn man die entsprechende Länge in goldenen Zoll misst.

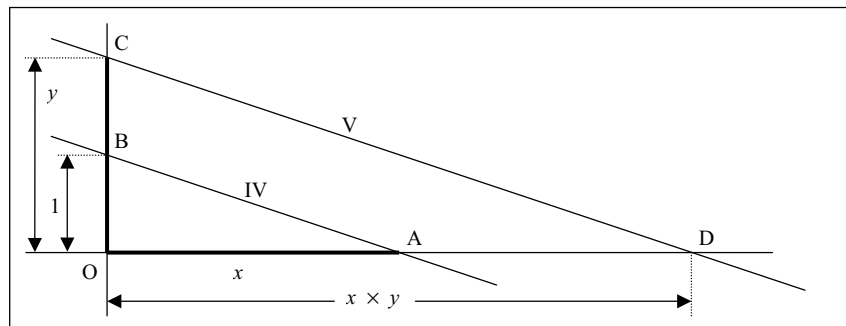


Abb. 17: Multiplikation mit Zirkel und Lineal

Division

Gegeben sind zwei Abstände x und y . Gesucht ist x / y . Die Idee ist, dass man im wesentlichen die gleiche Zeichnung wie bei der Multiplikation in einer etwas anderen Reihenfolge konstruiert.

- I. Zeichne eine waagerechte und eine senkrechte Linie. Den Schnittpunkt nennen wir O.
- II. Markiere auf der waagerechten Linie einen Punkt D im Abstand x rechts vom Punkt O. (x ist nun die Strecke O–D).
- III. Markiere auf der senkrechten Linie den Punkt B im Abstand 1 (goldenes Zoll) oberhalb von O und den Punkt C im Abstand y oberhalb von O.
- IV. Verbinde die Punkte C und D mit einer geraden Linie.
- V. Zeichne eine Linie, die parallel zu C–D verläuft und durch den Punkt B geht. Den Schnittpunkt mit der Waagerechten nennen wir A. Der Abstand zwischen O und A ist x/y .

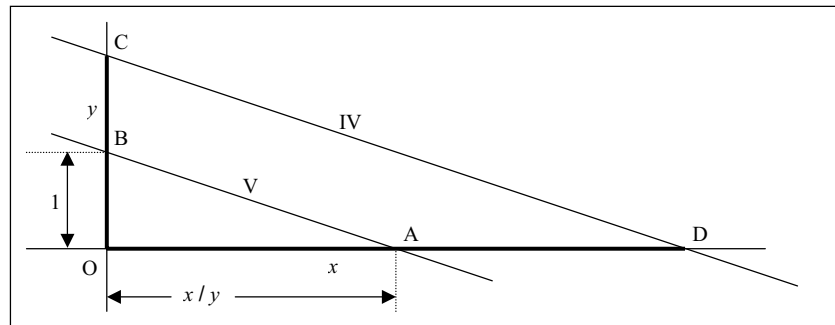


Abb. 18: Division mit Zirkel und Lineal

Mit diesen Rechenregeln können wir beliebige positive rationale Zahlen konstruieren, d.h. alle Zahlen, die sich als Bruch schreiben lassen in der Form n/m , wobei n und m natürliche Zahlen sind. Wir brauchen dazu lediglich die Addition und die Division. Wenn wir z.B. $5/7$ berechnen wollen, konstruieren wir einfach $(1+1+1+1+1)$ und $(1+1+1+1+1+1+1)$ und teilen die beiden Zahlen durcheinander².

Wir halten also fest:

- Alle positiven rationalen Zahlen sind konstruierbar.
- Unser „Analogrechner“, bestehend aus Bleistift, Lineal und Zirkel, verfügt über die vier Grundrechenarten.

2 Diese Methode ist nicht unbedingt immer sehr praktikabel, z.B. wenn wir Zahlen wie $45435424 / 52521875$ konstruieren wollen. Für solche Zahlen kann man sich oftmals aber schnellere Verfahren überlegen. Die Methode mit der Summe von Einsen hat den Vorteil, sofort erkennen zu können, dass Brüche im Prinzip konstruierbar sind.

Mit dem Analogrechner können wir aber noch eine weitere Rechenoperation durchführen, die uns zu irrationalen Zahlen führen wird, nämlich Quadratwurzeln³ ziehen. Das ist gewissermaßen die letzte Taste auf unserem Analogrechner.

Quadratwurzel

Gegeben ist ein Abstand x . Gesucht ist \sqrt{x} .

- I. Zeichne eine waagerechte und eine darauf senkrechte Linie. Den Schnittpunkt nennen wir O .
- II. Markiere einen Punkt A im Abstand x links von O und einen Punkt B im Abstand 1 rechts von O .
- III. Markiere einen Punkt M genau in der Mitte zwischen A und B .
- IV. Schlage einen Halbkreis um M durch die Punkte A und B . Den Schnittpunkt mit der Senkrechten nennen wir C . Der Abstand zwischen O und C beträgt \sqrt{x} .

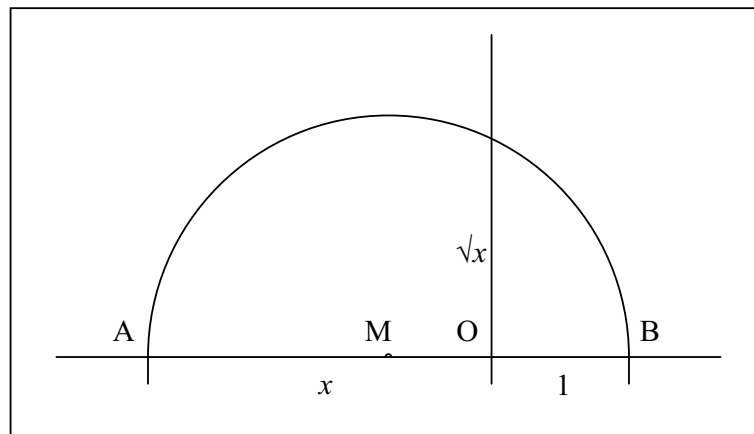


Abb. 19: Quadratwurzeln ziehen mit Zirkel und Lineal

Welche Zahlen sind konstruierbar?

Diese Frage können wir nun beantworten: Konstruierbar sind alle Zahlen, die sich aus ganzen Zahlen mit den vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln berechnen lassen, also z.B.

³ Die Quadratwurzel z.B. aus 2 ist die Zahl $\sqrt{2}$, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt, also $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. Schon in der Antike konnte man übrigens beweisen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

$$x = \sqrt{5/4} + 3 / \sqrt{1 - \sqrt{1/2}}.$$

Damit haben wir wieder unendlich viele Möglichkeiten, Zahlen zu konstruieren. Viele davon sind irrational. Das bedeutet aber nicht, dass man alle irrationalen Zahlen konstruieren könnte. Es gilt weiterhin, dass z.B. π nicht konstruierbar ist, die Quadratur des Kreises bleibt also auch im mathematischen Sinne unmöglich. Die Situation ist sogar noch ernüchternder: Man kann nicht nur zeigen, dass es unendlich viele Zahlen gibt, die nicht konstruierbar sind, sondern auch, dass die nicht konstruierbaren „mehr“ sind als die konstruierbaren. Weil es von beiden Arten von Zahlen unendlich viele gibt, steht das Wort „mehr“ in Anführungsstrichen. Mathematiker können aber auch verschiedene Arten von unendlich miteinander vergleichen.

Kehren wir aber zurück zu dem Siebzehneck. Gauß hat festgestellt, dass man den Cosinus von $\alpha = 360^\circ/17$ mit den Grundrechenarten und Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen berechnen kann, nämlich

$$\cos(\alpha) = (\sqrt{17} - 1 + \sqrt{2(17-\sqrt{17})}) + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17-\sqrt{17})}} - 2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}) / 16.$$

Damit könnte man jetzt ein Zeichenwerkzeug in die Hand nehmen, um mit den oben aufgeführten Verfahren $\cos(\alpha)$ und schließlich das Siebzehneck zu konstruieren. Im gewissen Sinn wären unsere Überlegungen hier abgeschlossen; es gibt jedoch einige „Schönheitsfehler“, insbesondere die Folgenden:

- Wenn Sie versuchen, die Formel für $\cos(\alpha)$ Schritt für Schritt abzuarbeiten, konstruieren Sie irgendwann z.B. $2(17+\sqrt{17})$. Diese Zahl ist größer als 42! Wenn Sie nicht über einen sehr großen und sehr genauen Zirkel verfügen, müssten Sie das „goldene Zoll“ sehr klein machen (z.B. 4 mm), was die Genauigkeit der Konstruktion zerstören würde.
- Aus der komplizierten Formel ist – zumindest für Nichtmathematiker – kaum ersichtlich, *warum* $\cos(\alpha)$ sich so berechnen lässt.
- Der junge Gauß dürfte nicht aufgrund einer plötzlichen Eingebung zu der Auffassung gekommen sein: „Bestimmt ist $\cos(\alpha) = (\sqrt{17} - 1 + \dots)$ “ Vielmehr ist er mit Sicherheit durch schrittweise Überlegungen zu diesem Resultat gelangt. Später hat er seine Gedanken geordnet und z.B. in einem Brief an die Petersburger Akademie der Wissenschaften zu Papier gebracht. Diesem Brief⁴ und seiner Argumentation wollen wir jetzt folgen.

4 Gauß, Carl Friedrich: Übersicht der Gründe der Constructibilität des Siebenzehneckes, St. Petersburger Filiale des Archivs der Russischen Akademie der Wissenschaften, F. 1, op. 110, Nr. 13, Bl. 1–4. Transkription in: Reich, Karin: Gauß’ „Übersicht der Gründe der Constructibilität des Siebenzehneckes“, in: Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft e.V. Göttingen, 40 (2003), S. 85–91.

Das Siebzeck: die Rechnung

Die Rechnung ist zwar für einen Mathematiker elementar, aber an einigen Stellen recht unübersichtlich und für den Laien nicht ganz leicht nachzuvollziehen. Für die tatsächliche Konstruktion auf dem Papier, die im nächsten Abschnitt behandelt wird, ist es aber ausreichend, wenn Sie diesen Teil nur überfliegen und darauf achten, welche Größen in welcher Reihenfolge berechnet werden.

Gauß' Idee beginnt damit, den Rechenvorgang scheinbar komplizierter zu machen. Er betrachtet nämlich nicht nur $\cos(\alpha)$ sondern auch $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$, etc. bis $\cos(16\alpha)$. Die Summe all dieser Cosinus ist bekannt, nämlich

$$\cos(0) + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \dots + \cos(16\alpha) = 0.$$

Außerdem ist $\cos(0) = 1$, und die übrigen Cosinus sind paarweise gleich: $\cos(\alpha) = \cos(16\alpha)$, $\cos(2\alpha) = \cos(15\alpha)$, etc. Wir müssen uns daher nur noch mit acht verschiedenen Cosinus beschäftigen. Die Summenformel schreiben wir in der Form

$$\cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) + \dots + \cos(8\alpha) = -1/2.$$

Gauß zerlegt diese Summe in zwei Teilsummen mit jeweils vier Summanden und stellt fest, dass er auch die Teilsummen bestimmen kann. Die Teilsummen werden wieder zerlegt in Paare und diese schließlich in die einzelnen Cosinus. Die erste Zerlegung ist die folgende:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha) &= p \\ \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha) &= p' \end{aligned}$$

Um die Zahlen p und p' zu bestimmen, werden die beiden Teilsummen multipliziert. Das führt zu 16 Produkten der Art $\cos(n\alpha) \cos(m\alpha)$, die man nach der allgemeinen Formel

$$\cos(x) \cos(y) = (\cos(x+y) + \cos(x-y)) / 2$$

umformen kann zu einer Summe von 32 einzelnen Cosinus.

Bemerkenswert dabei ist, dass die Winkel α , 2α , 3α , ..., 8α wieder alle gleich häufig vorkommen, so dass $pp' = -1$. Wenn man die Teilsummen p und p' addiert, erhält man wieder die Summe von acht Summanden, d.h. $p + p' = -1/2$. Mit den beiden Gleichungen kann man p und p' ausrechnen, wobei als Ergebnis die Zahl 17 erscheint:

$$\begin{aligned} p &= (-1 + \sqrt{17}) / 4 \\ p' &= (-1 - \sqrt{17}) / 4 \end{aligned}$$

Wir fahren fort, indem wir die Teilsumme p zerlegen in

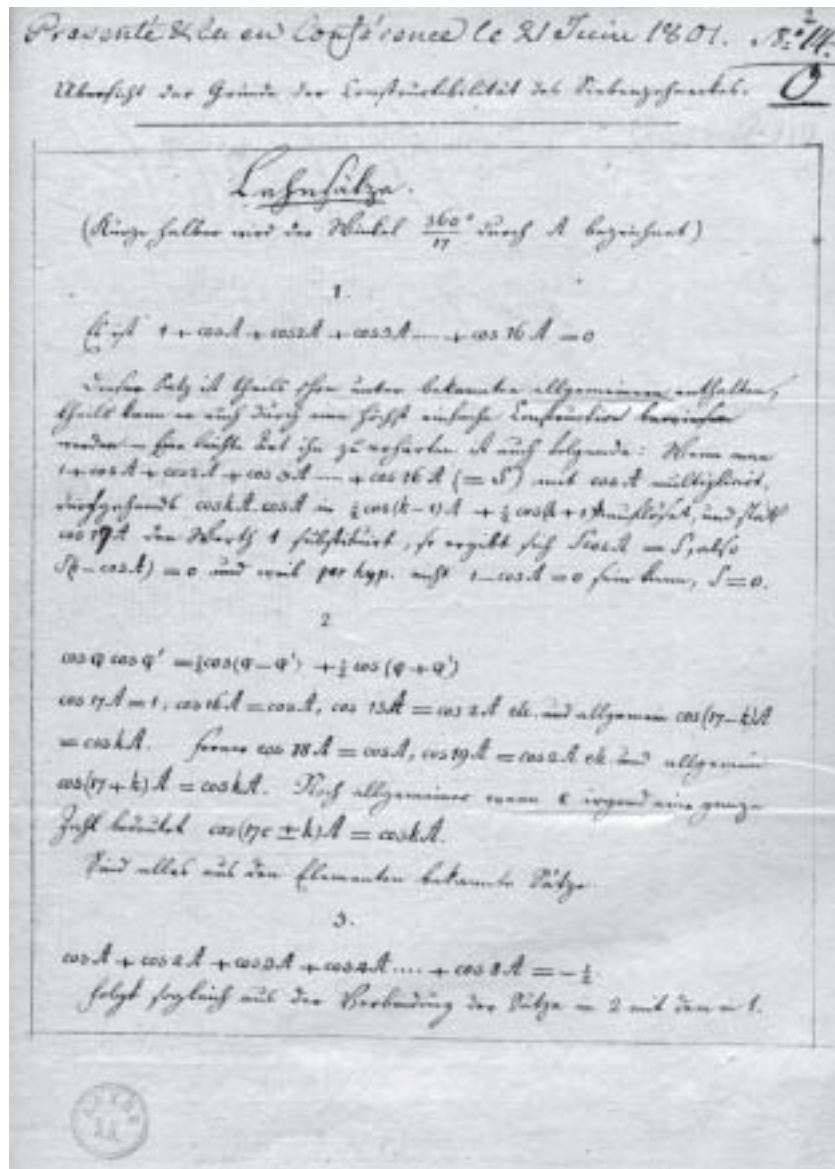


Abb. 20

Erste Seite von Gauß' „Übersicht der Gründe der Constructibilität des Siebzehneckes“
(C 4) © St. Petersburg Filiale des Archivs der Russischen Akademie der Wissenschaften

$$\cos(\alpha) + \cos(4\alpha) = q$$

$$\cos(2\alpha) + \cos(8\alpha) = r$$

Genauso wie oben (nur auf einfacherem Weg) kann man nun $qr = -1/4$ herleiten, und mit $q + r = p$ bekommt man

$$q = (p + \sqrt{(1 + pp)}) / 2$$

$$r = (p - \sqrt{(1 + pp)}) / 2$$

Die Teilsumme p' wird ebenso in Paare zerlegt:

$$q' = \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) = (p' + \sqrt{(1 + p'p')}) / 2$$

$$r' = \cos(6\alpha) + \cos(7\alpha) = (p' - \sqrt{(1 + p'p')}) / 2$$

wobei wir $q'r' = -1/4$ und $q' + r' = p'$ verwendet haben. Schließlich trennen wir noch $\cos(\alpha) + \cos(4\alpha) = q$ auf, indem wir feststellen, dass für das Produkt $\cos(\alpha) \cos(4\alpha) = q'$ gilt. Daraus erhalten wir unter anderem

$$\cos(\alpha) = (q + \sqrt{(qq - 2q')}) / 2$$

Das Siebzeck: die Zeichnung

Beginnen wir mit p und p' . Die Zahl $\sqrt{17}$ konstruieren wir dabei am einfachsten mit einem rechtwinkligen Dreieck mit kurzen Seiten der Länge 1 und 4 (Satz des Pythagoras: $1 \times 1 + 4 \times 4 = \sqrt{17} \times \sqrt{17}$). Außerdem ist es günstig, gleich den Faktor 4 in der Zeichnung zu berücksichtigen und eine große Einheit 1 zu wählen. Den Rest entnehmen Sie der Skizze oder führen Sie selbst auf dem Papier durch.

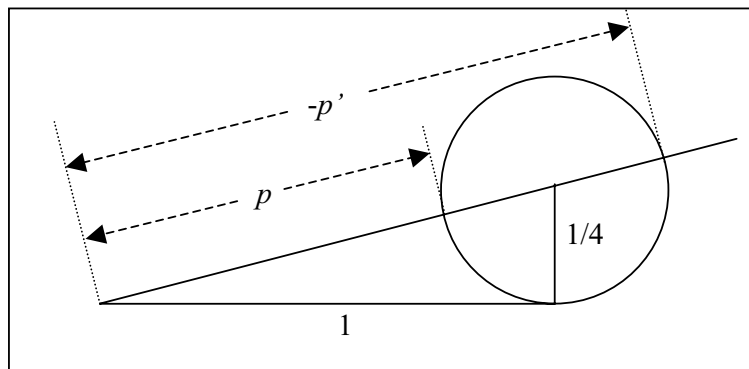


Abb. 21: Konstruktion von p und p'

Für die Konstruktion der Größe q brauchen wir das Quadrat pp . Das gibt uns die Gelegenheit, die Konstruktion eines Produkts zu versuchen.

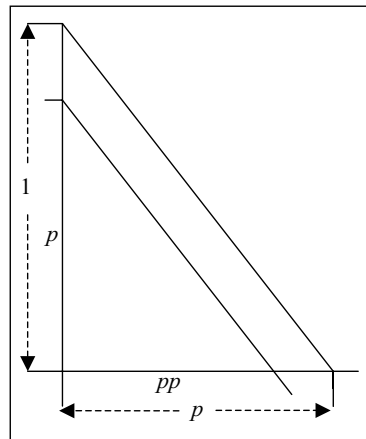


Abb. 22: Konstruktion von pp

Auch die nächsten Schritte sind einfach: 1 zu pp addieren, die Wurzel konstruieren, p addieren, halbieren und schon ist q konstruiert. Die Konstruktion von q' geschieht auf ähnliche Weise, so dass uns am Schluss nur noch die Gleichung $\cos(\alpha) = (q + \sqrt{(qq - 2q')}) / 2$ bleibt. Hier wird der „zweite Teil“ der Konstruktion, d.h. beginnend mit der Quadratwurzel, demonstriert.

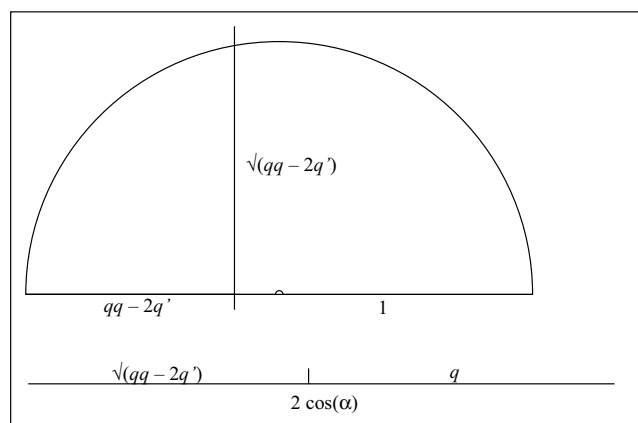


Abb. 23: Konstruktion von $\cos(\alpha)$

Der tiefere Grund der Konstruierbarkeit des Siebzehnecks

Wir haben hier folgende Argumentationslinie verfolgt: Das Siebzehneck ist konstruierbar, wenn man die Zahl $\cos(\alpha)$ konstruieren kann, wobei $\alpha = 360^\circ/17$. Konstruierbar sind alle Zahlen, die man mit den Rechenoperationen $+$, $-$, \times , $/$, $\sqrt{}$ (beliebig oft und in beliebiger Reihenfolge angewandt) aus ganzen Zahlen berechnen kann. Mit der obigen Rechnung kann man sich überzeugen, dass $\cos(\alpha)$ eine solche Zahl ist.

Warum aber ist die Rechnung so genau aufgegangen? Warum funktioniert das nicht zum Beispiel mit einem Siebeneck? Die Frage ist, warum wir, als wir in der Rechnung Teilsummen multipliziert haben (z.B. pp'), immer Zahlen erhalten haben, die wir schon berechnet hatten. Wir können in diesem Rahmen nicht genau auf den tieferen Hintergrund eingehen, zwei Bemerkungen dazu sind aber vielleicht erhellend.

Erstens ist 17 nicht einfach irgendeine, sondern eine besondere Zahl, und es gibt noch andere regelmäßige Polygone, die sich aus genau den gleichen Gründen konstruieren lassen. Es ist nämlich $17 = 2^{(2 \times 2)} + 1$, und außerdem ist 17 eine Primzahl. Solch eine Zahl ist z.B. auch $65537 = 2^{(2 \times 2 \times 2 \times 2)} + 1$. Versuchen Sie aber nicht, dieses komplizierte Polygon zu konstruieren. Es ließe sich ohnehin nicht von einem Kreis unterscheiden.

Zweitens hat Gauß in dem Brief an die Petersburger Akademie, dem wir hier gefolgt sind, selbst einen Hinweis auf die tieferen Gründe gegeben. Dieser ist besonders interessant, weil er aus der sogenannten Zahlentheorie stammt. „Zahlentheorie“ ist nicht etwa ein Synonym für Mathematik, sondern die Theorie der ganzen Zahlen, die sich z.B. mit Primzahlen beschäftigt oder damit, welcher Rest übrig bleibt, wenn man zwei ganze Zahlen durcheinander teilt. Überraschend ist, dass die Theorie der *ganzen* Zahlen uns den Grund dafür angibt, warum die irrationale Zahl $\cos(\alpha)$ zur Klasse der konstruierbaren Zahlen gehört. An der Stelle, an der Gauß die Summe von acht Cosinus in zwei Teilsummen aufteilt, trifft er eine Wahl, welche vier Cosinus jeweils zusammen in eine Teilsumme kommen, nämlich die Cosinus der Winkel α , 2α , 4α , 8α in eine Teilsumme und die der Winkel 3α , 5α , 6α , 7α in die andere. Dazu schreibt er in einer Fußnote: „Wer mit dem was bisher in der höhern Arithmetik gethan ist bekannt ist, dem wird es nicht entgehen, dass die Zahlen 1, 2, 4, 8 quadratische Reste der Zahl 17 sind, d.i. Reste die bei der Division eines Quadrats durch 17 übrig bleiben können; 3, 5, 6, 7 hingegen Nichtreste, d.i. Zahlen die bei einer solchen Division nie Reste sind.“