# Lösungsweg zum Siebzehneck

Kreisteilungsgleichung:

$$x^{17}-1=0 \tag{1}$$

Eine triviale Lösung ist $x=1$; nach Polynomdivision ergibt sich aus (1) daher

$$\sum_{k=0}^{16} x^k = 0 \tag{2}$$

Setze

$$\begin{aligned} P_1 &:= x^{16}+x^{15}+x^{13}+x^9+x^8+x^4+x^2+x \\ P_2 &:= x^{14}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^7+x^6+x^5+x^3 \end{aligned} \tag{3}$$

Es gilt für jede Lösung $x$ wegen (1): $x^n = x^m$ mit $m \equiv n \bmod 17$ und daher

$$\begin{aligned} P_1+P_2 &= \sum_{k=1}^{16} x^k = -1 \\ P_1 \cdot P_2 &= 4\sum_{k=1}^{16} x^k = -4 \end{aligned} \quad \text{mit der Lösung } P_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17} \tag{4}$$

Setze weiter

$$\begin{aligned} P_{11} &:= x^{16}+x^{13}+x^4+x \\ P_{12} &:= x^{15}+x^9+x^8+x^2 \\ P_{21} &:= x^{14}+x^{12}+x^5+x^3 \\ P_{22} &:= x^{11}+x^{10}+x^7+x^6 \end{aligned} \tag{5}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} P_{11}+P_{12} &= P_1 \\ P_{11} \cdot P_{12} &= \sum_{k=1}^{16} x^k = -1 \\ P_{21}+P_{22} &= P_2 \\ P_{21} \cdot P_{22} &= \sum_{k=1}^{16} x^k = -1 \end{aligned} \quad \text{mit den Lösungen} \quad \begin{aligned} P_{11,12} &= \frac{P_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{P_1^2+4} \\ P_{21,22} &= \frac{P_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{P_2^2+4} \end{aligned} \tag{6}$$

Setze weiter

$$
\begin{aligned}
P_{111} &:= x^{16} + x \\
P_{112} &:= x^{13} + x^4
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
P_{111} + P_{112} &= P_{11} \\
P_{111} \cdot P_{112} &= P_{21}
\end{aligned}
\quad \text{mit der Lösung} \quad P_{111,112} = \frac{P_{11}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{P_{11}^2 - 4P_{21}}
\tag{8}
$$

Es bleibt zu lösen:

$$
P_{111} = x^{16} + x \quad \text{bzw.} \quad P_{111}x = x^{17} + x^2 = 1 + x^2
\tag{9}
$$

mit dem Ergebnis

$$
x_{1,2} = \frac{P_{111}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{P_{111}^2 - 4}
\tag{10}
$$

Beide Lösungen sind komplex; nach Einsetzen aller Zwischenergebnisse aus (4), (6) und (8) erhält man

$$
\Re\left(x_{1,2}\right) = \frac{1}{16} \cdot \left( -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right)
\tag{11}
$$

bzw. numerisch

$$
\Re\left(x_{1,2}\right) = 0{,}9324722294, \quad \Im\left(x_{1,2}\right) = \pm 0{,}3612416662.
\tag{12}
$$

Zum Vergleich: es ist

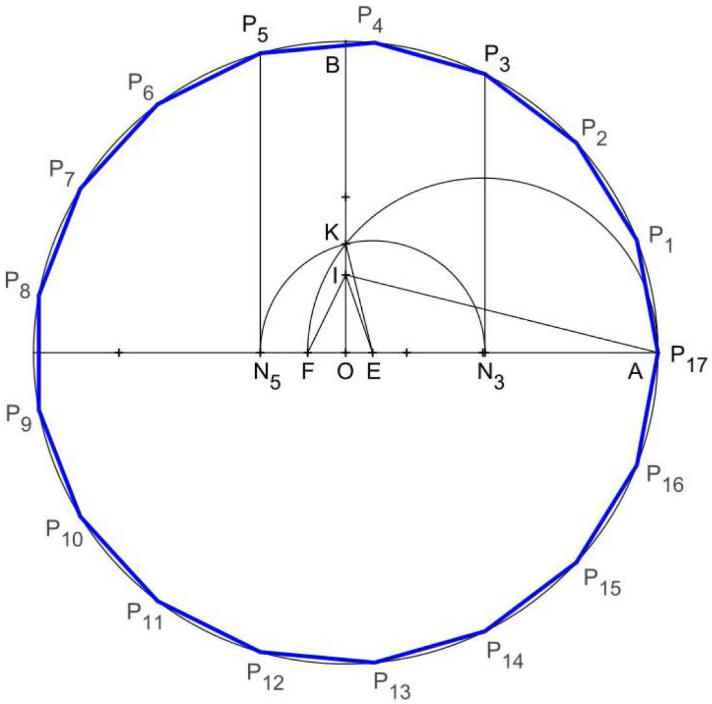
$$
\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = 0{,}9324722294, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) = 0{,}3612416662,
\tag{13}
$$

d.h. $x_1 = \frac{P_{111}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{P_{111}^2 - 4}$ entspricht der „ersten“ Ecke des regelmäßigen Siebzehnecks, gegen den Uhrzeigersinn gezählt.

Literatur:

J. Bewersdorff (2013): *Algebra für Einsteiger*. Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie. 5. Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden, Kapitel 7.

Konstruktion von Herbert William Richmond (1893): *A Construction for a regular polygon of seventeen sides.* In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.* 26, 1893, S. 206–207.




Ist der Umkreis um das entstehende Siebzehneck mit dem Mittelpunkt O gegeben, kann das Siebzehneck konstruiert werden durch:

1. Zeichnen des Durchmessers durch den Mittelpunkt O; Schnittpunkt mit Umkreis ist A.
2. Errichten des Radius senkrecht zu $\overline{AO}$ auf O bis zum Umkreis; Schnittpunkt mit Umkreis ist B.
3. Konstruktion des Punktes I durch Vierteln der Strecke $\overline{BO}$; I liegt näher an O.
4. Konstruktion des Punktes E durch Vierteln des Winkels OIA.
5. Konstruktion des Punktes F mithilfe einer Senkrechte zu $\overline{EI}$ auf I; Halbierung des 90°-Winkels; Schnittpunkt mit Durchmesser ist F und Winkel FIE ist 45°.
6. Konstruktion des Thaleskreises über $\overline{AF}$; Schnittpunkt mit $\overline{BO}$ ist K.
7. Zeichnen des Halbkreises um den Mittelpunkt E mit dem Radius $\overline{EK}$; Schnittpunkte mit dem Durchmesser sind $N_3$ und $N_5$ (dabei liegt $N_3$ sehr nahe beim Mittelpunkt des Thaleskreises über $\overline{AF}$).
8. Konstruktion der Tangente ab $N_3$; Schnittpunkt mit dem Umkreis ist der Eckpunkt $P_3$ des Siebzehnecks; der Kreisbogen $\overset{\frown}{OAP_3}$ ist somit 3/17 des Umkreisumfanges.
9. Konstruktion der Tangente ab $N_5$; Schnittpunkt mit dem Umkreis ist der Eckpunkt $P_5$ des Siebzehnecks; der Kreisbogen $\overset{\frown}{OAP_5}$ ist somit 5/17 des Umkreisumfanges.
10. Ein vierzehnmaliges Abtragen der Strecke $\overline{AP_3}$ ab dem Eckpunkt $P_3$ gegen dem Uhrzeigersinn ergibt der Reihe nach die Eckpunkte $P_6$, $P_9$, $P_{12}$, $P_{15}$, $P_1$, $P_4$, $P_7$, $P_{10}$, $P_{13}$, $P_{16}$, P2, $P_8$, $P_{11}$ und $P_{14}$.
11. Verbinden der so gefundenen Punkte $P_1$, $P_2$, …, $P_{17}$, $P_1$ vervollständigt das 17-Eck.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Siebzehneck