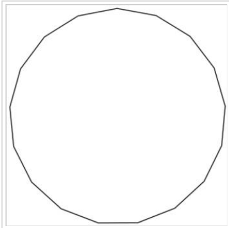
Siebzehneck

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Das **Siebzehneck** ist eine geometrische Figur, die zur Gruppe der Vielecke (Polygone) gehört. Es ist definiert durch siebzehn Punkte, die durch siebzehn Strecken zu einem geschlossenen Linienzug verbunden sind.

Dieser Artikel behandelt im Folgenden ausschließlich das *regelmäßige* Siebzehneck, das konvex ist, siebzehn gleich lange Seiten hat und dessen Ecken auf einem gemeinsamen Umkreis liegen.



Regelmäßiges Siebzehneck

Inhaltsverzeichnis

Eigenschaften

Das Besondere an einem regelmäßigen Siebzehneck ist die Tatsache, dass es konstruierbar ist, das heißt, es kann unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal (den *Euklidischen Werkzeugen*) gezeichnet werden. Dies wurde von Carl Friedrich Gauß im Jahre 1796 nachgewiesen. Er zeigte, dass für den Kosinus des Zentriwinkels

$$\cos\frac{360^\circ}{17} = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}-2\sqrt{2\left(17+\sqrt{17}\right)}}\right)$$

gilt, woraus sich die Konstruierbarkeit ergibt. Außerdem lassen sich damit auch verschiedene Werte des Siebzehnecks wie Seitenlänge, Umfang, Inkreisradius und Fläche berechnen.

Größen eines regelmäßigen Siebzehnecks mit dem Umkreisradius r_u

Seitenlänge	$s=\sqrt{2\left(1-\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right)\right)}\cdot r_u \approx 0{,}3675\cdot r_u$
Umfang	$U=17\sqrt{2\left(1-\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right)\right)}\cdot r_u \approx 6{,}2475\cdot r_u$
Inkreisradius	$r_i=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right)}{2}}\cdot r_u \approx 0{,}983\cdot r_u$
Fläche	$A=\frac{17}{2}\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{360^\circ}{17}\right)}\cdot r_u^2 \approx 3{,}071\cdot r_u^2$

Mathematischer Hintergrund

Der Entdeckung von Gauß liegt eine Auflösung der Kreisteilungsgleichung $x^{17}-1=0$ zugrunde, deren Lösungen – es handelt sich um die 17. Einheitswurzeln – in der Gaußschen Zahlenebene der komplexen Zahlen ein regelmäßiges Siebzehneck mit Radius 1 bilden. Diese Gleichung kann allein durch den Gebrauch geschachtelter Quadratwurzeln gelöst werden (siehe oben für den Realteil der „ersten“ von 1 verschiedenen Lösung $\zeta=e^{2\pi i/17}$). Gauß erkannte 1796 als 18-Jähriger diese Möglichkeit „Durch angestrengtes Nachdenken … am Morgen … (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war)“[1] aufgrund allgemeiner zahlentheoretischer Eigenschaften von Primzahlen, in diesem Fall konkret der Primzahl 17: Die modulo einer Primzahl p gebildeten, von 0 verschiedenen Restklassen $1,\ldots,p-1$ können nämlich als Potenzen $g^0=1, g^1=g, g^2,\ldots,g^{p-2}$ einer sogenannten Primitivwurzel g dargestellt werden, wobei im Fall $p=17$ konkret $g=3$ gewählt werden kann:

$$1,\quad 3\cdot 1=3,\quad 3\cdot 3=9,\quad 3\cdot 9 \mod 17=10,\quad 3\cdot 10 \mod 17=13,$$
$$5,\ 15,\ 11,\ 16,\ 14,\ 8,\ 7,\ 4,\ 12,\ 2,\ 6$$

Briefmarke der Deutschen Post der DDR von 1977: Gauß, Siebzehneck, Zirkel und Lineal

Sortiert man nun die von 1 verschiedenen 17-ten Einheitswurzeln entsprechend, das heißt in der Reihenfolge

$$\zeta,\ \zeta^3,\ \zeta^9,\ \zeta^{10},\ \zeta^{13},\ \zeta^5,\ \zeta^{15},\ \zeta^{11},\ \zeta^{16},\ \zeta^{14},\ \zeta^8,\ \zeta^7,\ \zeta^4,\ \zeta^{12},\ \zeta^2,\ \zeta^6,$$

so erhält man durch Teilsummation von jeder zweiten, jeder vierten beziehungsweise jeder achten Einheitswurzel aus dieser Auflistung die sogenannten Gaußschen Perioden: zwei 8-gliedrige Perioden mit je 8 Summanden, vier 4-gliedrige Perioden mit je 4 Summanden und acht 2-gliedrige Perioden mit je 2 Summanden. Aufgrund prinzipieller Eigenschaften oder aber durch explizite Berechnung lässt sich dafür zeigen:[2]

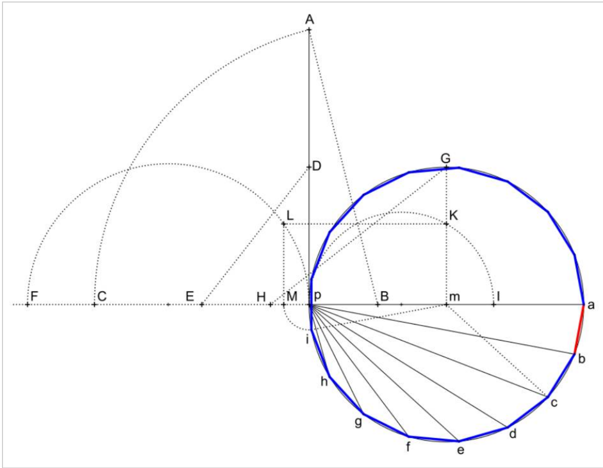
- Die beiden 8-gliedrigen Perioden sind Lösungen einer quadratischen Gleichung mit ganzen Koeffizienten.
- Die vier 4-gliedrigen Perioden sind Lösungen von zwei quadratischen Gleichungen, deren Koeffizienten aus den 8-gliedrigen Perioden berechenbar sind.
- Die acht 2-gliedrigen Perioden sind Lösungen von vier quadratischen Gleichungen, deren Koeffizienten aus den 4-gliedrigen Perioden berechenbar sind.

Dabei gilt für die zweigliedrige Periode zur „ersten“ Einheitswurzel $\zeta+\zeta^{16}=\zeta+\zeta^{-1}=2\cos(2\pi/17)$.

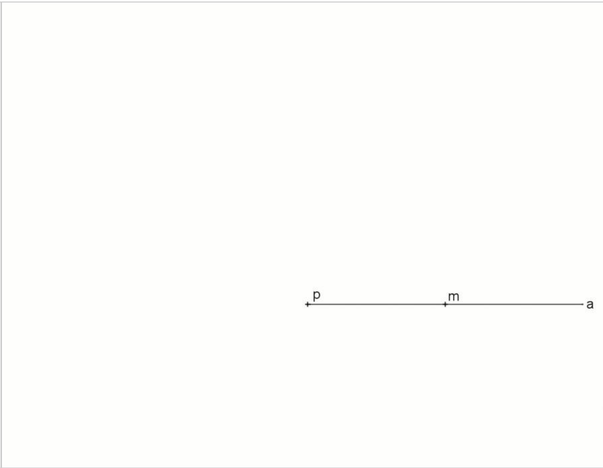
Der beschriebene Ansatz lässt sich analog für jede Primzahl der Form $2^{2^k}+1$ durchführen. Fünf solche Primzahlen, die „Fermatsche Primzahlen“ genannt werden, sind bekannt: 3, 5, 17, 257, 65537. Daher gehören auch das regelmäßige 257-Eck und das regelmäßige 65537-Eck zu den konstruierbaren Polygonen.

Konstruktion

Eine der ersten geometrischen Konstruktionsanleitungen für das regelmäßige Siebzehneck stammt von Magnus Georg Paucker, der sie 1819 der Kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst vorlegte, wo sie 1822 veröffentlicht wurde.[3]



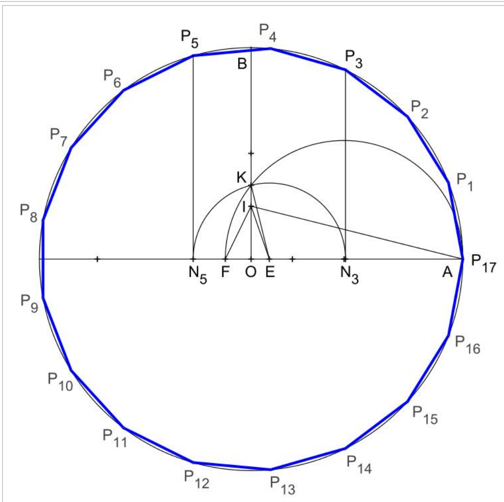
Konstruktionsskizze



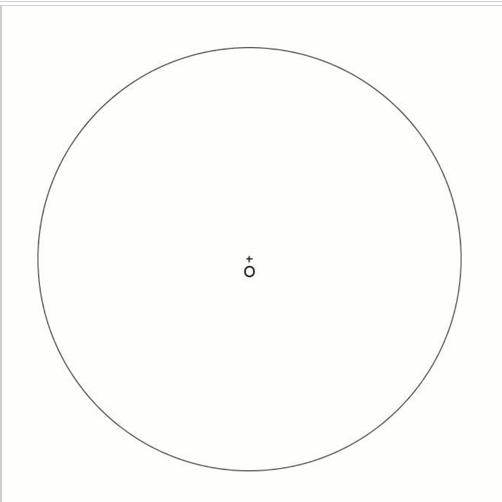
Animation der Skizze

1. Zeichne auf dem horizontalen Durchmesser $\overline{pa}$ um den Mittelpunkt m den Umkreis des werdenden 17-Ecks
2. Errichte den senkrechten Durchmesser $\overline{pA} = \overline{pa}$ auf p
3. Halbiere den Radius $\overline{mp}$, in B
4. Verlängere $\overline{pa}$ ab p
5. Trage die Strecke $\overline{AB}$ ab B auf die Verlängerung ab, Schnittpunkt ist C
6. Halbiere $\overline{pA}$ in D
7. Halbiere $\overline{pC}$ in E
8. Trage die Strecke $\overline{ED}$ ab E auf die Verlängerung ab, Schnittpunkt ist F
9. Errichte den senkrechten Radius $\overline{mG}$ auf m
10. Halbiere $\overline{mC}$ in H
11. Trage die Strecke $\overline{HG}$ ab H auf $\overline{pa}$ ab, Schnittpunkt ist I
12. Konstruiere den Halbkreis über $\overline{pF}$
13. Konstruiere den Halbkreis über $\overline{pI}$, Schnittpunkt mit $\overline{mG}$ ist K
14. Zeichne die Parallele zu $\overline{mP}$ ab K, Schnittpunkt mit Halbkreis über $\overline{pF}$ ist L
15. Errichte die Senkrechte durch L auf $\overline{mH}$, Schnittpunkt ist M
16. Zeichne den Kreisbogen mit Radius $\overline{pM}$ bis zum Umkreis, Schnittpunkt ist i
17. Trage die Strecke $\overline{MF}$ ab p auf dem Umkreis ab, Schnittpunkt ist c der Sehne $\overline{pc}$, der Kreisbogen cpa ist der doppelte Kreisbogen des 17-Ecks
18. Halbiere den Winkel cpa, Schnittpunkt ist b der Sehne $\overline{pb}$, somit ist die Strecke $\overline{ab}$ die erste Seite des 17-Ecks
19. Trage die Strecke $\overline{ab}$ ab c fünfmal im Uhrzeigersinn auf dem Umkreis ab, es ergeben sich die Sehnen $\overline{pd}$, $\overline{pe}$, $\overline{pf}$, $\overline{pg}$ und $\overline{ph}$
20. Trage die Strecke $\overline{ab}$ ab i achtmal im Uhrzeigersinn auf dem Umkreis ab
21. Verbinde die so gefundenen Punkte zu einem vollständigen 17-Eck.

Eine weitere Konstruktion legte Johannes Erchinger 1825 der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen vor, die Gauß daraufhin in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen besprach.[4] Die folgende einfachere Konstruktion stammt von Herbert William Richmond aus dem Jahr 1893.[5]



Konstruktionsskizze



Animation der Skizze

Ist der Umkreis um das entstehende Siebzehneck mit dem Mittelpunkt O gegeben, kann das Siebzehneck konstruiert werden durch:

1. Zeichnen des Durchmessers durch den Mittelpunkt O; Schnittpunkt mit Umkreis ist A.
2. Errichten des Radius senkrecht zu $\overline{AO}$ auf O bis zum Umkreis; Schnittpunkt mit Umkreis ist B.
3. Konstruktion des Punktes I durch Vierteln der Strecke $\overline{BO}$; I liegt näher an O.
4. Konstruktion des Punktes E durch Vierteln des Winkels OIA.
5. Konstruktion des Punktes F mithilfe einer Senkrechte zu $\overline{EI}$ auf I; Halbierung des 90°-Winkels; Schnittpunkt mit Durchmesser ist F und Winkel FIE ist 45°.
6. Konstruktion des Thaleskreises über $\overline{AF}$; Schnittpunkt mit $\overline{BO}$ ist K.
7. Zeichnen des Halbkreises um den Mittelpunkt E mit dem Radius $\overline{EK}$; Schnittpunkte mit dem Durchmesser sind N_3 und N_5 (dabei liegt N_3 sehr nahe beim Mittelpunkt des Thaleskreises über $\overline{AF}$).
8. Konstruktion der Tangente ab N_3; Schnittpunkt mit dem Umkreis ist der Eckpunkt P_3 des Siebzehnecks; der Kreisbogen OAP_3 ist somit 3/17 des Umkreisumfanges.
9. Konstruktion der Tangente ab N_5; Schnittpunkt mit dem Umkreis ist der Eckpunkt P_5 des Siebzehnecks; der Kreisbogen OAP_5 ist somit 5/17 des Umkreisumfanges.
10. Ein vierzehnmaliges Abtragen der Strecke $\overline{AP_3}$ ab dem Eckpunkt P_3 gegen dem Uhrzeigersinn ergibt der Reihe nach die Eckpunkte P_6, P_9, P_{12}, P_{15}, P_1, P_4, P_7, P_{10}, P_{13}, P_{16}, P_2, P_8, P_{11} und P_{14}.
11. Verbinden der so gefundenen Punkte P_1, P_2, …, P_{17}, P_1 vervollständigt das 17-Eck.

Siehe auch

- Kreisteilung

Literatur

- Godfrey Harold Hardy, E. M. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 2008, ISBN 978-0-199-21986-5, Kapitel 5.8: Construction of the regular polygon of 17 sides, S. 71–77.
- Harold Scott MacDonald Coxeter: *Introduction to Geometry*. 2. Auflage. Wiley, 1989, ISBN 978-0-471-50458-0, S. 26–28.
- Karin Reich: *Die Entdeckung und frühe Rezeption der Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks und dessen geometrische Konstruktion durch Johannes Erchinger (1825)*. In: Rüdiger Thiele (Hrsg.): *Mathesis, Festschrift zum siebzigsten Geburtstag von Matthias Schramm*. GNT-Verlag, Berlin/Diepholz 2000, S. 101–118.

Einzelnachweise

1. Zitiert nach Jörg Bewersdorff: *Algebra für Einsteiger. Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie.* Vieweg+Teubner Verlag, 4. Auflage 2009, ISBN 9783834807762, S. 68 (online (http://www.springerlink.com/content/h052523887hk1841/)).
2. Details siehe Bewersdorff, S. 71–74.
3. Magnus Georg Paucker: *Geometrische Verzeichnung des regelmäßigen Siebzehn-Ecks und Zweyhundersiebenundfünfzig-Ecks in den Kreis*. In: *Jahresverhandlungen der Kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst*. Band 2, 1822, S. 160–219 (Einleitung (https://books.google.de/books?id=aUJRAAAAcAAJ&pg=PA160&hl=de&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false), Beschreibung S. 187–188 (https://books.google.de/books?id=aUJRAAAAcAAJ&pg=PA187&lpg=PA187&dq=%22Geometrische+Verzeichnung+nach+der+obigen+Analysis.%22&f=false#v=onepage&q=%22Geometrische%20Verzeichnung%20nach%20der%20obigen%20Analysis.%22&f=false) und Abbildung nach S. 416 (Fig. 12) (https://books.google.de/books?id=aUJRAAAAcAAJ&pg=PA416&lpg=PA416&dq=%22416%22+%22Kabinette+vertrauungsvoll+er%C3%B6ffnen%22&source=bl&ots=sRvDkefJt8&sig=F9F12bh2Bmo9ZBAEQ7Bm0llFWtc&hl=de&sa=X&ved=0ahUKEwiGkbTUqtLJAhWKCiwKHZerBXIQ6AEIHzAA#v=onepage&q=%22416%22%20%22Kabinette%20vertrauungsvoll%20er%C3%B6ffnen%22&f=false))..
4. Carl Friedrich Gauß: In: *Göttingische Gelehrte Anzeigen*. 87, Nr. 203, 19. Dezember 1825, S. 2025–2027 (Online (http://books.google.de/books?id=iEVKAAAAcAAJ&pg=PA2025#v=onepage&q&f=false)).
5. Herbert W. Richmond: *A Construction for a regular polygon of seventeen sides*. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. 26, 1893, S. 206–207 (Beschreibung (http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN600494829_0026&DMDID=DMDLOG_0030&LOGID=LOG_0035&PHYSID=PHYS_0218) und Abbildung (Fig. 6) (http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN600494829_0026&DMDID=DMDLOG_0040&LOGID=LOG_0046&PHYSID=PHYS_0301)).

Weblinks

Commons: Regelmäßiges Siebzehneck (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Regular_heptadecagons?uselang=de) – Sammlung von Bildern, Videos und Audiodateien

- Eric W. Weisstein: *Heptadecagon (http://mathworld.wolfram.com/Heptadecagon.html).* In: *MathWorld* (englisch).