

# Generating unfavourable VaR scenarios with patchwork copulas

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Institut für Mathematik  
Universität Oldenburg

Dr. Olena Ragulina

HDI, Hannover

zuvor:

Dept. of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

# Agenda

1. Copulas – eine kurze Einführung
2. Copulas bei diskreten Verteilungen
3. Zerlegung–der–Eins–Copulas
4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße
5. Ungünstige Patchwork–Copulas
6. Literatur

# 1. Copulas – ein kurze Einführung

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Eine *Copula* ist eine Funktion  $C$  von  $d$  Variablen auf dem Würfel  $[0,1]^d$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Wertebereich von  $C$  ist das Einheitsintervall  $[0,1]$ ;
2.  $C(\mathbf{u}) = 0$  für alle  $\mathbf{u}$  in  $[0,1]^d$ , für die mindestens eine Komponente 0 ist;
3.  $C(\mathbf{u}) = u_k$  falls alle Koordinaten von  $\mathbf{u}$  gleich 1 sind außer der  $k$ -ten;
4.  $C$  ist  $\Delta$ -monoton in dem Sinne, dass für alle  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  in  $[0,1]^d$  das Maß  $\Delta C_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ , das  $C$  dem Intervall  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$  beimisst, nicht-negativ ist, d.h.

$$\Delta C_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} := \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{0,1\}^d} (-1)^{\sum_{i=1}^d \varepsilon_i} C(\varepsilon_1 \mathbf{a}_1 + (1 - \varepsilon_1) \mathbf{b}_1, \dots, \varepsilon_d \mathbf{a}_d + (1 - \varepsilon_d) \mathbf{b}_d) \geq 0.$$

*In anderen Worten:* Eine Copula  $C$  ist die Verteilungsfunktion eines  $d$ -dimensionalen Zufallsvektors mit uniformen stetigen Randverteilungen über  $(0,1)$ .

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

**Sklar's Theorem:** Es sei  $H$  eine  $d$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$ . Dann existiert eine Copula  $C$ , so dass

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}.$$

Wenn alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, ist die Copula eindeutig bestimmt, anderenfalls ist sie nur eindeutig auf den Wertebereichen der  $F_1, \dots, F_d$  bestimmt.

Umgekehrt gilt bei Stetigkeit: bezeichnen  $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$  die (Pseudo-)Inversen bzw. Quantilfunktionen der Randverteilungsfunktionen, dann ist

$$C(u_1, \dots, u_d) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad \text{für } u_1, \dots, u_d \in (0, 1)$$

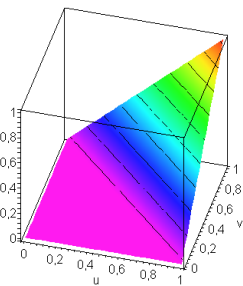
eine Repräsentation der Copula.

[Pseudo – Inverse einer Verteilungsfunktion  $F$ :  $F^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$ ]

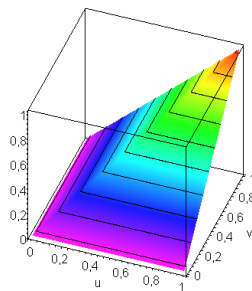
## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Fréchet-Hoeffding-Schranken:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} =: \mathcal{W}^d(\mathbf{u}) \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq \mathcal{M}^d(\mathbf{u}) := \min\{u_1, \dots, u_d\},$$



keine Copula für  $d > 2$   
Repräsentanten:  $(X, 1-X)$



stets Copula  
 $(X, X, \dots, X)$

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

- Die Copula hängt - im Gegensatz zu den Korrelationen - nicht von den Randverteilungen der Einzelrisiken ab.
- Die (mehrdimensionalen) Randverteilungsfunktionen von Copulas sind ebenfalls Copulas.
- Die Copula charakterisiert bei Stetigkeit der Randverteilungen die gemeinsame Abhängigkeitsstruktur der Einzelrisiken eindeutig.
- Die Copula ist invariant gegen alle gleichsinnig monotonen Transformationen der Einzelrisiken, insbesondere nichtlineare.
- Paarweise Korrelationen zwischen Einzelrisiken  $X$  und  $Y$  können über die Copula ausgedrückt werden, aber nicht umgekehrt:

$$\text{Kov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C(F_X(x), F_Y(y)) - F_X(x)F_Y(y)] dx dy.$$

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Man kann grob drei Typen von Copulas unterscheiden:

1. Copulas, die nur *implizit angegeben*, aber *explizit stochastisch konstruiert* werden können und damit auch einfach simulierbar sind (Gauß-,  $t$ - und allgemeiner die elliptisch konturierten Copulas)
2. Copulas, die *explizit angegeben* werden können, aber in der Regel nur aufwändig stochastisch *konstruierbar* sind (Archimedische Copulas, Vine-Copulas)
3. Copulas, die *explizit angegeben* werden **und** *explizit stochastisch konstruiert* werden können (Patchwork-Copulas, Zerlegung-der-Eins-Copulas, Singuläre Mischungs-Copulas).



## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Beispiele für Copulas vom Typ 1 ( $\Sigma$  = positiv-definite symmetrische Matrix):

Gauß-Copula  $C_{\Sigma}^G$  :

$$C_{\Sigma}^G(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}^{\text{tr}} \Sigma^{-1} \mathbf{v}\right) dv_1 \cdots dv_n$$

t-Copula  $C_{\Sigma}^{t_{\nu}}$  mit  $\nu \in \mathbb{N}$  Freiheitsgraden:

$$C_{\Sigma}^{t_{\nu}}(u_1, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{(\pi\nu)^n \det(\Sigma)}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{v}^{\text{tr}} \Sigma^{-1} \mathbf{v}\right)^{-\left(\frac{\nu+n}{2}\right)} dv_1 \cdots dv_n$$

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Monte-Carlo-Simulation einer Gauß-Copula  $C_{\Sigma}^G$ : Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^{tr}$

folgt einer Gauß-Copula  $C_{\Sigma}^G$  über die Konstruktion

$\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{A}\mathbf{Y})$  (koordinatenweise) mit der Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standard-

Normalverteilung,  $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^{tr}$  (z.B. durch Spektral- oder Cholesky-Zerlegung) und

$\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)^{tr}$  mit stochastisch unabhängigen, jeweils standard-normalverteilten

Koordinaten  $Y_1, \dots, Y_d$ . Für  $d = 2$  ergibt sich einfacher

$$X_1 = \Phi(Y_1), \quad X_2 = \Phi\left(\rho Y_1 + \sqrt{1-\rho^2} Y_2\right), \quad \text{wobei } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}.$$

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Beispiele für Copulas vom Typ 2: *Archimedische Copulas*:

Diese sind charakterisiert durch ihren so genannten *Erzeuger*  $\varphi$  vermöge

$$C_{\varphi}(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^d \varphi(u_i)\right) \quad \text{für } u_1, \dots, u_d \in [0, 1].$$

Spezialfall:

$$\varphi(x) = -\ln x$$

mit

$$C_{\varphi}(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^d \varphi(u_i)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^d \ln u_i\right) = \prod_{i=1}^d u_i$$

(Unabhängigkeitscopula II)

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Charakterisierung “geeigneter” (so genannter *striker*) Erzeuger:

Sei  $\varphi: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton fallend und konvex mit  $\varphi(1) = 0$  und  $\lim_{z \downarrow 0} \varphi(z) = \infty$ ;  $\varphi^{-1}$  bezeichne die zugehörige Inverse auf dem Intervall  $[0, \infty)$ . Dann ist die durch

$$C_{\varphi}(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^d \varphi(u_i)\right) \quad \text{für } u_1, \dots, u_d \in [0,1]$$

gegebene Abbildung  $C_{\varphi}$  eine Copula für  $n=2$ . Sie ist eine Copula **für alle**  $n \geq 2$  genau dann, wenn  $\varphi^{-1}$  *total monoton* ist, d.h. wenn gilt

$$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \varphi^{-1}(s) \geq 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } s > 0.$$

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Nach einem klassischen Satz von *Bernstein* können die Inversen solcher Erzeuger als Laplace-Transformierte nicht-negativer Zufallsvariablen  $Z$  dargestellt werden vermöge

$$\varphi^{-1}(s) = E(e^{-sZ}), \quad s \geq 0,$$

denn:

$$\varphi^{-1}(0) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(s) = 0, \quad \text{und} \quad (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \varphi^{-1}(s) = E(Z^k e^{-sZ}) \geq 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $s > 0$ .

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Die Erzeugung von Zufallsvektoren  $\mathbf{U}$  mit einer Copula von diesem Typ erfolgt in drei Schritten:

- Erzeuge eine Zufallszahl  $Z$  mit der Misch-Verteilungsfunktion  $G$ .
- Erzeuge (auch von  $Z$ ) unabhängige Standardzufallszahlen  $W_1, \dots, W_d$ .

- Setze  $\mathbf{U} := \left( \frac{\hat{G}(-\ln(W_1))}{Z}, \dots, \frac{\hat{G}(-\ln(W_d))}{Z} \right)$

mit der zugehörigen Laplace-Transformierten  $\hat{G}(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x)$ ,  $t \geq 0$ . Die zu  $G$  gehörige Verteilung kann also auch als eine *Mischverteilung* für den Verteilungsparameter in der Familie der Exponentialverteilungen aufgefasst werden.

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Beispiele:

Name	Copula $C_\theta$	Erzeuger $\varphi_\theta$	Mischverteilung
Clayton	$\left[ \sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - d + 1 \right]^{-1/\theta}, \theta > 0$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\Gamma\left(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta}\right)$
Gumbel	$\exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^d (-\ln(u_i))^\theta\right\}^{1/\theta}\right), \theta \geq 1$	$(-\ln t)^\theta$	positiv stabil
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 - (1 - e^{-\theta}) \prod_{i=1}^d \left\{\frac{1 - e^{-\theta u_i}}{1 - e^{-\theta}}\right\}\right), \theta > 0$	$-\ln \frac{1 - e^{-\theta t}}{1 - e^{-\theta}}$	$\mathcal{L}\mathcal{S}(e^{-\theta})$

## 1. Copulas – eine kurze Einführung

Tail-Abhängigkeit für Copulas (falls existent): mit Repräsentanten  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ :

$$\text{obere: } \lambda_U := \lim_{t \rightarrow 1^-} P(U_1 > t | U_2 > t)$$

$$\text{untere: } \lambda_L := \lim_{t \rightarrow 0^+} P(U_1 \leq t | U_2 \leq t)$$

Beispiele:

$\lambda_U = 0$  für Gauß-Copula mit  $\rho < 1$ , untere Fréchet-Hoeffding-Schranke

$\lambda_U = 1$  für obere Fréchet-Hoeffding-Schranke,

$$\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta} \text{ für Gumbel-Copula } C(u_1, u_2) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^2 (-\ln(u_i))^\theta\right\}^{1/\theta}\right), \theta \geq 1$$



## 2. Copulas bei diskreten Verteilungen

## 2. Copulas bei diskreten Verteilungen

Bei diskreten Verteilungen ist die unterliegende Copula nicht eindeutig bestimmt. Dies soll folgendes Beispiel illustrieren:

$X_1, X_2$  seien  $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$  binomialverteilte Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilung

$P(X_1 = i, X_2 = j)$		$i$		$P(X_2 = j)$
		0	1	
$j$	0	$a$	$b = \frac{1}{2} - a$	$\frac{1}{2}$
	1	$b = \frac{1}{2} - a$	$a$	$\frac{1}{2}$
$P(X_1 = i)$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

mit  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ .

## 2. Copulas bei diskreten Verteilungen

$P(X_1 = i, X_2 = j)$		$i$		$P(X_2 = j)$
		0	1	
$j$	0	$a$	$b = \frac{1}{2} - a$	$\frac{1}{2}$
	1	$b = \frac{1}{2} - a$	$a$	$\frac{1}{2}$
$P(X_1 = i)$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

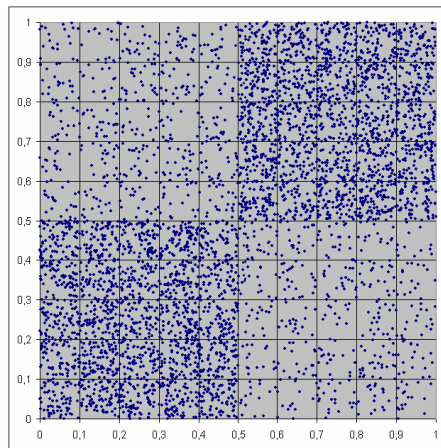
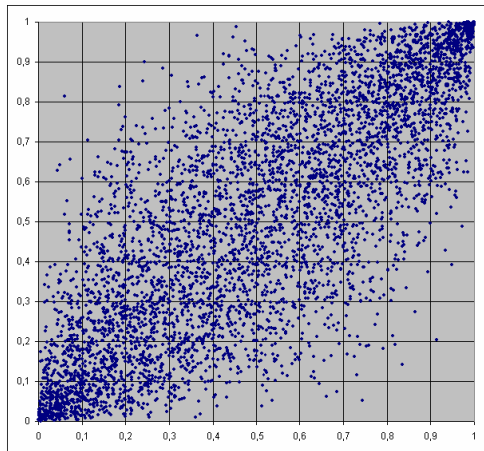
1. Variante: Gauß-Copula-Repräsentant  $\mathbf{U}$  mit  $\rho = -\cos(2\pi a)$

2. Variante: Patchwork-Copula-Repräsentant  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  mit Dichte

$$f_{\mathbf{U}}(u, v) = 4a \cdot \mathbb{1}_{\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]}(u, v) + 4a \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]}(u, v) + 4b \cdot \mathbb{1}_{\left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]}(u, v) + 4b \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]}(u, v)$$

$$\text{Konstruktion: } X_1 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } U_1 \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } U_2 \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

## 2. Copulas bei diskreten Verteilungen



Copula-Simulation für  $a = 0.4$  bzw.  $\rho = 0.80902$

links: Gauß-Copula,

rechts: Patchwork Copula

# 3. Zerlegung-der-Eins- Copulas

### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

Gegeben sei eine Familie von Funktionen  $\{\phi(m, k, u) | 0 \leq k \leq m-1, m \in \mathbb{N}, 0 < u < 1\}$  (so genannte [endliche] „Zerlegung der Eins“) mit den folgenden Eigenschaften:

- $\sum_{k=0}^{m-1} \phi(m, k, \cdot) = 1$  für  $m \in \mathbb{N}$
- $\int_0^1 \phi(m, k, u) du = \frac{1}{m}$  für  $k = 0, \dots, m-1$ .

Ferner sei  $\mathbf{p}_m = [p_m(k_1, \dots, k_d)]$  ein  $d$ -dimensionaler uniformer *Kontingenztensor* (d.h.  $\mathbf{p}$  enthält alle Elementarwahrscheinlichkeiten eines diskreten  $d$ -dimensionalen Zufallsvektors  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$ , dessen Randverteilungen diskrete Gleichverteilungen über  $T = \{0, \dots, m-1\}$  sind). Dann definiert

$$c_\phi(u_1, \dots, u_d) := m^d \sum_{k_1=0}^{m-1} \dots \sum_{k_d=0}^{m-1} p_m(k_1, \dots, k_d) \prod_{i=1}^d \phi(m, k_i, u_i), \quad (u_1, \dots, u_d) \in (0, 1)^d$$

die Dichte der durch  $\mathbf{U}$  induzierten Zerlegung-der-Eins-Copula.

### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

*Schachbrett-Copula*: (auch *Box-Copula*, vgl. HUMMEL UND MÄRKERT (2012))

Für  $d \in \mathbb{N}$  bezeichne

$$I_{k_1, \dots, k_d} := \prod_{j=1}^d \left( \frac{k_j}{m}, \frac{k_j + 1}{m} \right] \text{ für } (k_1, \dots, k_d) \in T^d.$$

Die Gesamtheit dieser Intervalle beschreibt eine Zerlegung des  $d$ -dimensionalen Einheitswürfels in  $m^d$  gleichvolumige Teilwürfel der Kantenlänge  $1/m$ . Die zugehörige Dichte  $c_{m\Box}$  der Schachbrett-Copula  $C_{m\Box}$  ist dann definiert durch

$$c_{m\Box} := m^d \sum_{k_1=0}^{m-1} \dots \sum_{k_d=0}^{m-1} p_m(k_1, \dots, k_d) \mathbb{1}_{I_{k_1, \dots, k_d}}.$$

Hier ist speziell  $\phi(m, k, u) = \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]}(u)$ .

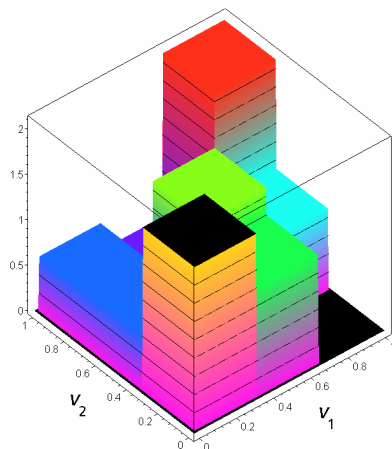
### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

**Beispiel:** Es sei  $d = 2$  und  $m = 3$ . Betrachte die Kontingenztafel

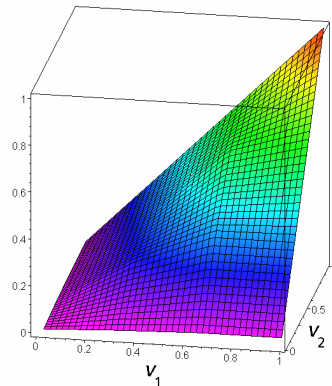
$P(U_1 = i, U_2 = j)$		$i$			$P(U_2 = j)$
		0	1	2	
$j$	0	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	0	$\frac{1}{3}$
	1	$\frac{2}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{1}{3}$
	2	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{3}$
$P(U_1 = i)$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	



### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas



Copula-Dichte  $c_{3\Box}(v_1, v_2)$



Copula  $C_{3\Box}(v_1, v_2)$

### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

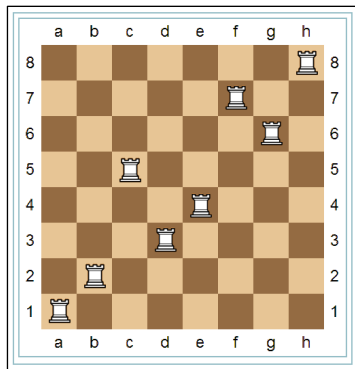
**Approximationssatz:** Jede Copula  $C$  in  $d$  Dimensionen kann gleichmäßig durch eine Folge  $\{C_{m\Box}\}_{m \in \mathbb{N}}$  von Schachbrett-Copulas approximiert werden. Eine Wahl zulässiger Parameter ist hierbei gegeben durch

$$p_{k_1, \dots, k_d} = P(\mathbf{Z} \in I_{k_1, \dots, k_d}) = P\left(\bigcap_{j=1}^d \left\{ \frac{k_j}{m} < Z_j \leq \frac{k_j + 1}{m} \right\}\right) \text{ für } (k_1, \dots, k_d) \in T^d,$$

wobei  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)$  einen Zufallsvektor mit der Copula  $C$  bezeichne.

### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

*Turm-Copulas:*



Spezielle Schachbrett-Copulas, die ihre Wahrscheinlichkeitsmasse so verteilen wie die Positionen von Schachtürmen, die sich gegenseitig nicht bedrohen. In  $d$  Dimensionen kann eine Turm-Copula folgendermaßen mit Hilfe von Permutationen konstruiert werden:

$$M := \begin{bmatrix} \sigma_{01} & \sigma_{02} & \cdots & \sigma_{0,d-1} & \sigma_{0d} \\ \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1,d-1} & \sigma_{1d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m-2,1} & \sigma_{m-2,2} & \cdots & \sigma_{m-2,d-1} & \sigma_{m-2,d} \\ \sigma_{m-1,1} & \sigma_{m-1,2} & \cdots & \sigma_{m-1,d-1} & \sigma_{m-1,d} \end{bmatrix}$$

Hierbei ist  $(\sigma_{0k}, \sigma_{1k}, \dots, \sigma_{m-1,k})$  eine geeignete Permutation von  $(0, 1, \dots, m-1)$  für  $k = 1, \dots, d$ .

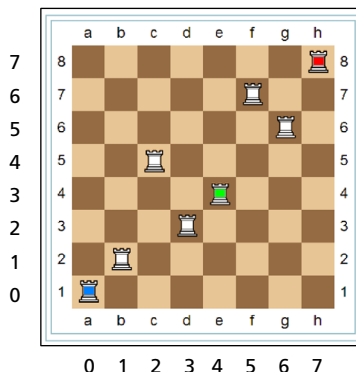
### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

Eine Schachbrett-Copula  $C$  ist genau dann eine Turm-Copula, wenn gilt:

$$p_m(k_1, \dots, k_d) = P\left(\bigcap_{i=1}^d \{U_i = k_i\}\right) = \frac{1}{m} \Leftrightarrow (k_1, \dots, k_d) = (\sigma_{t1}, \sigma_{t2}, \dots, \sigma_{td}) \text{ f\"ur ein } t \in T.$$

**Beispiel:** Die zum obigen Bild gehörige Turm-Copula ist gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \\ 6 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} (k_1, k_2) = (0, 0) \\ (k_1, k_2) = (4, 3) \\ (k_1, k_2) = (7, 7) \end{matrix}$$



### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

*Bernstein-Copula*: (vgl. COTTIN UND PFEIFER (2014), PFEIFER UND RAGULINA (2020))

Bernstein-Polynom vom Grad  $m$ :

$$B(m, k, z) = \binom{m}{k} z^k (1-z)^{m-k}, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad k = 0, \dots, m \in \mathbb{N}.$$

Hier definiert

$$c_B(u_1, \dots, u_d) := m^d \sum_{k_1=0}^{m-1} \dots \sum_{k_d=0}^{m-1} p_m(k_1, \dots, k_d) \prod_{i=1}^d B(m-1, k_i, u_i), \quad (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

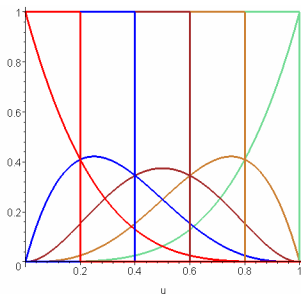
die Dichte der *Bernstein-Copula*  $C_B$ , induziert durch  $\mathbf{U}$ . Es ist speziell

$$\phi(m, k, u) = \binom{m-1}{k} u^k (1-u)^{m-1-k}. \quad (\text{Dichte der } B(k+1, m-k)\text{-Beta-Verteilung!})$$

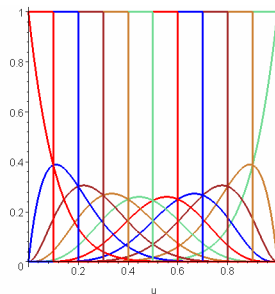
### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

**Bemerkung:** Eine Bernstein-Copula kann als "geglättete" Version einer Schachbrett-Copula aufgefasst werden, bei der die in den disjunkten Teilwürfeln konzentrierten Wahrscheinlichkeitsmassen „stetig“ im Einheitswürfel verteilt werden. Der obige **Approximationssatz** gilt analog.

Visualisierung des Glättungseffekts für  $d = 1$ :



$m = 5$



$m = 10$

### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas

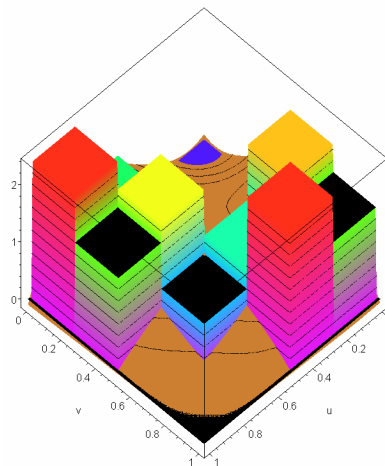
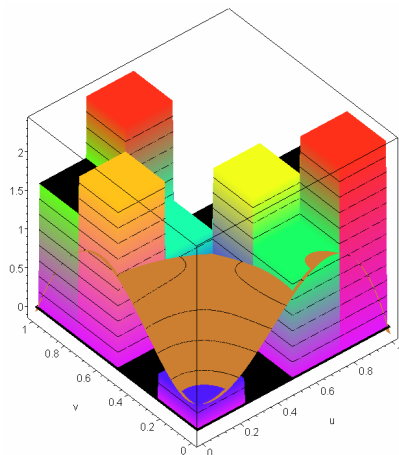
#### Beispiel:

Glättungseffekt bei  $d = 2$  und  $m = 4$ ; die Verteilung von  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  sei durch die folgenden Tabelle gegeben:

$P(\mathbf{U} = (i, j))$		$i$			
		0	1	2	3
$j$	0	0.02	0.00	0.08	0,15
	1	0.00	0.03	0.12	0.10
	2	0.13	0,07	0.05	0.00
	3	0.10	0,15	0.00	0.00

Die folgenden beiden Graphiken verdeutlichen den Glättungseffekt:

### 3. Zerlegung-der-Eins Copulas



Bernstein-Copula-Dichte (braun) vs. Schachbrett-Copula-Dichte



## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risiko- maße

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Sei  $\mathfrak{X}$  ein konvexer Kegel nicht-negativer Zufallsvariablen  $X$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Ein Risikomaß  $R$  auf  $\mathfrak{X}$  ist eine Abbildung  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$P^X = P^Y \Rightarrow R(X) = R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \quad \text{[Verteilungsinvarianz]}$$

$$R(cX) = cR(X) \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{X} \text{ und } c \geq 0 \quad \text{[Skaleninvarianz]}$$

$$R(X + c) = R(X) + c \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{X} \text{ und } c \geq 0 \quad \text{[Translationsinvarianz]}$$

$$R(X) \leq R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \text{ mit } X \leq_{st} Y \quad \text{[Monotonie]}$$

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Ein Risikomaß heißt *kohärent*, wenn zusätzlich gilt:

$$R(X + Y) \leq R(X) + R(Y) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X} \quad \text{[Subadditivität]}$$

Diese Ungleichung induziert einen *Diversifikationseffekt* für beliebige Risiken  $X_1, \dots, X_n$  (abhängig oder nicht), denn es folgt mit vollständiger Induktion:

$$R\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \leq \sum_{k=1}^n R(X_k) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Im Folgenden werden wir den Term “(Risiko-)Konzentrationseffekt” im Gegensatz zum “Diversifikationseffekt” benutzen, charakterisiert durch die umgekehrte Ungleichung

$$R(X + Y) > R(X) + R(Y) \quad \text{für gewisse } X, Y \in \mathfrak{X}.$$

Das populäre Standardabweichungsprinzip *SDP* (das auch in der Tarifierung verwendet wird) ist gegeben durch

$$SDP(X) = E(X) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X)} \quad \text{für ein festes } \gamma > 0 \text{ und } X \in \mathfrak{X} = \mathcal{L}_+^2(\Omega, \mathcal{A}, P),$$

die Menge der quadratisch integrierbaren Risiken auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

*SDP* ist aber *kein* Risikomaß, da es *nicht monoton* ist (erfüllt aber alle anderen Bedingungen).

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

*Subadditivität* des Standardabweichungsprinzips:

$$\begin{aligned}
 SDP(X + Y) &= E(X + Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X + Y)} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Korr}(X, Y) \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\
 &\leq E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma \sqrt{(\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)})^2} \\
 &= E(X) + E(Y) + \gamma (\sqrt{\text{Var}(X)} + \sqrt{\text{Var}(Y)}) = SDP(X) + SDP(Y)
 \end{aligned}$$

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

*Nicht-Monotonie* des Standardabweichungsprinzips:

Risiken  $X, Y$  mit Dichten

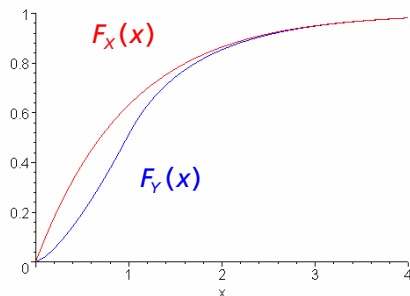
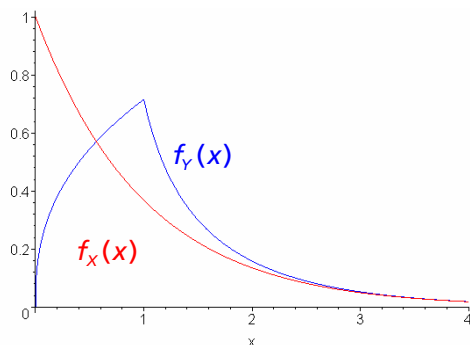
$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad f_Y(x) = \begin{cases} ax^b, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-2e^{-x}}}, & x > 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } a = \frac{1}{\sqrt{e(e-2)}} = 0.7156\dots, \quad b = \frac{3-e}{e-2} = 0.3922\dots$$

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

*Nicht-Monotonie* des Standardabweichungsprinzips:

Hier gilt  $X \leq_{st} Y$  mit  $E(X) = \sigma(X) = 1$ ,  $E(Y) = 1.2003\dots$ ,  $\sigma(Y) = 0.9294\dots$



Für  $\gamma = 3$  ergibt sich:  $SDP(X) = 4 > 3.9887\dots = SDP(Y)$ .

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das in Basel II/III und Solvency II verwendete Risikomaß ist der Value-at-Risk **VaR**, definiert als Quantil der Risiko-Verteilung:

$$\text{VaR}_\alpha(X) := Q_X(1-\alpha) \quad \text{für } X \in \mathfrak{X} \text{ und } 0 < \alpha < 1,$$

wobei  $Q_X$  die Quantilfunktion bezeichnet:

$$Q_X(u) := \inf \{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq u\} \quad \text{für } 0 < u < 1.$$

**VaR** ist ein Risikomaß, aber im Allgemeinen *nicht kohärent*.



## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Das "kleinste" kohärente Risikomaß oberhalb des **VaR** ist der Expected Shortfall (auch *average Value-at-Risk*) **ES**, der gegeben ist durch

$$ES_{\alpha}(X) := \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \text{VaR}_u(X) du \quad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

Falls  $P(X \geq \text{VaR}_{\alpha}(X)) = \alpha$  gilt, entspricht dies dem Ausdruck

$$ES_{\alpha}(X) = E(X | X \geq \text{VaR}_{\alpha}(X)).$$

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

- Solvency II: Umsetzung der Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments und des Rates vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (→ Versicherungsaufsichtsgesetz VAG 2015)
- Risikobasierte Kapitalanforderungen nach Modulen (u.a. Lebens- / Nichtlebensversicherung)
- Risikomaß ist  $\text{VaR}_\alpha$  mit  $\alpha = 0.005$ .
- Annahme: Risiken im Nichtlebenbereich sind näherungsweise lognormalverteilt

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

- Standardformel für das Solvenzkapital SCR im Prämien- und Reserverisiko ist vorgegeben als Volumenfaktor

$$\rho_{1-\alpha}(\sigma)_{\text{VaR}} = \frac{\exp\left[k_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\ln(1+\sigma^2)}\right]}{\sqrt{1+\sigma^2}} - 1$$

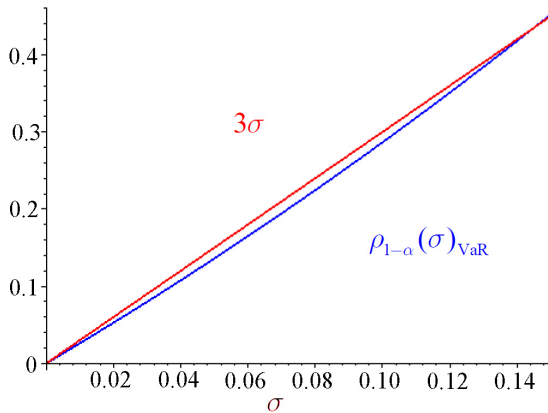
bezogen auf das Volumenmaß Prämieinnahmen des betrachteten Rechnungsjahres (hergeleitet aus dem  $1-\alpha$ -Quantil einer Lognormalverteilung mit Erwartungswert 1 und Varianz  $\sigma^2$ , wobei  $k_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ )

- Vereinfachung durch die Commission Delegated Regulation of the EU (2015), Article 115:

$$\rho_{1-\alpha}(\sigma)_{\text{VaR}} \approx 3\sigma \text{ für } \alpha = 0.005.$$

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

Diese Vereinfachung erscheint akzeptabel, solange  $\sigma < 0.15$ .



graphische Gegenüberstellung

## 4. Ein kurzer Rückblick auf Risikomaße

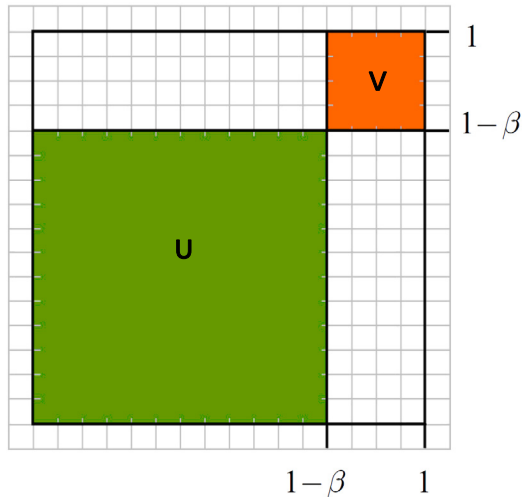
- Besondere Berichtspflichten:
- ORSA (Own Risk and Solvency Assessment): Bericht mit eigener Einschätzung der Risikosituation des Unternehmens; Überprüfung der Standard-Formel; Szenarioanalysen für ungünstige Risikolagen
- SFCR (Solvency and Financial Condition Report): Gemäß § 40 VAG im Rahmen der Veröffentlichungspflichten unter Solvency II (Säule III) zu veröffentlichender Bericht, in dem wesentliche Informationen über die Solvabilitäts- und Finanzlage des Versicherungsunternehmens darzulegen sind. Die darzulegenden Informationen richten sich nach Art, Umfang und Komplexität der Geschäftstätigkeit sowie dem Risikoprofil des Unternehmens. Vor dem Hintergrund, dass erhöhte Transparenz zu verbesserter Beaufsichtigung führt, bildet der SFCR den Kern der Publizitätspflichten gegenüber der Öffentlichkeit. Adressaten sind insbesondere Versicherungsnehmer, aber auch weitere Stakeholder wie Wettbewerber und Ratingagenturen.

# 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Lemma.** Für  $d \geq 2$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , seien  $\tilde{\mathbf{U}} = (U_1, \dots, U_d)$  und  $\tilde{\mathbf{V}} = (V_1, \dots, V_d)$   $d$ -dimensionale Zufallsvektoren über  $[0, 1]^d$  mit stetigen uniformen Randverteilungen (i.e.,  $\tilde{\mathbf{U}}$  und  $\tilde{\mathbf{V}}$  repräsentieren  $d$ -dimensionale Copulas). Sei ferner  $I$  eine binomialverteilte Zufallsvariable, unabhängig von  $\tilde{\mathbf{U}}$  und  $\tilde{\mathbf{V}}$ , mit  $P(I = 1) = 1 - P(I = 0) = p \in (0, 1)$ . Dann besitzt der Zufallsvektor  $\mathbf{W}$  mit den Komponenten  $W_i := I \cdot p \cdot U_i + (1 - I) \cdot [p + (1 - p) \cdot V_i]$  für  $1 \leq i \leq d$  ebenfalls stetig uniforme Randverteilungen, i.e.  $\mathbf{W}$  repräsentiert ebenfalls eine  $d$ -dimensionale Copula.

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas



Skizze des Trägers der obigen Patchwork-Copula mit  $\beta = 1 - p$



## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Anwendung:** Wir betrachten ein Portfolio aus  $d$  Versicherungsverträgen (Risiken) mit einer Copula  $\mathbf{U}$ . Seien die  $d$  (zur Vereinfachung als stetig angenommenen) Randverteilungen der Risiken mit  $F_1, \dots, F_d$  bezeichnet und ihre Quantilfunktionen mit  $Q_1, \dots, Q_d$ , dann repräsentieren beide Zufallsvektoren  $(Q_1(U_1), \dots, Q_d(U_d))$  und  $(Q_1(W_1), \dots, Q_d(W_d))$  einen Risikovektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  mit den gegebenen Randverteilungen. Aus Sicht der Risikotheorie (Risikoaggregation) erzeugt  $\mathbf{X} := (Q_1(W_1), \dots, Q_d(W_d))$  aber im Allgemeinen ein ungünstigeres VaR-Szenario for

$S = \sum_{i=1}^d X_i$  als  $\mathbf{X} := (Q_1(U_1), \dots, Q_d(U_d))$ , selbst wenn  $p$  nahe bei 1 liegt und sich daher  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{W}$  nur marginal unterscheiden.

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

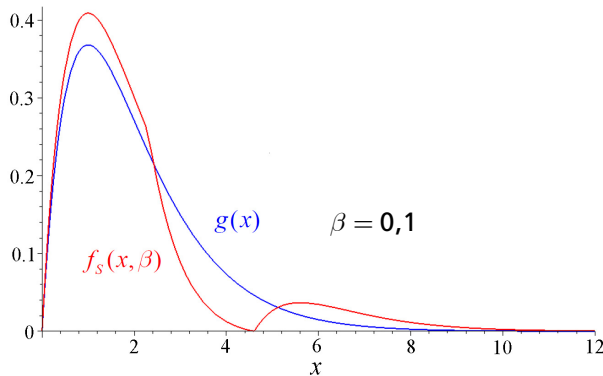
**Beispiel 1** : Zwei standard-exponentialverteilte Risiken mit lokalen uniformen Patchwork-Variablen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$ :

$$F_S(x, \beta) = \begin{cases} \frac{1 - (1+x)e^{-x}}{1-\beta}, & 0 \leq x \leq -\ln(\beta) \\ \frac{1 - 2\beta + 2e^{-x} \ln(\beta) + (1+x)e^{-x}}{1-\beta}, & -\ln(\beta) \leq x \leq -2\ln(\beta) \\ \frac{\beta - 2e^{-x} \ln(\beta) - (1+x)e^{-x}}{\beta}, & x \geq -2\ln(\beta). \end{cases}$$

Verteilungsfunktion des Summenrisikos unter Patchwork-Copula

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Beispiel 1:** Zwei standard-exponentialverteilte Risiken mit lokalen uniformen Patchworkvariablen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$ :



Dichten des Summenrisikos ohne (blau, Gamma-Verteilung)  
und mit Copula (rot)

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

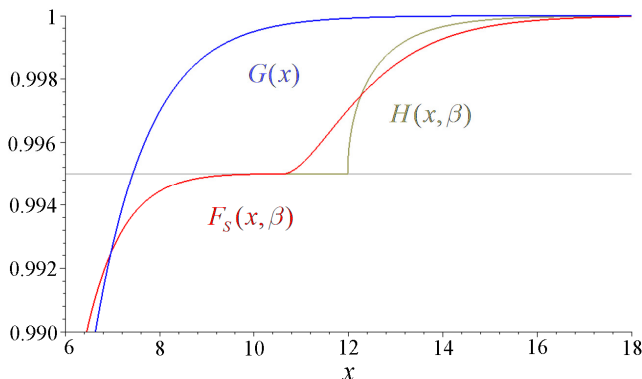
**Beispiel 1:** Zwei standard-exponentialverteilte Risiken mit Patchwork-Copula:

$$H(x, \beta) = \begin{cases} F_S(x), & x \leq -2\ln(\beta) \\ 1 - \beta, & -2\ln(\beta) \leq x \leq -2\ln(\beta/2) \\ 1 - \beta + \sqrt{\beta^2 - 4e^{-x}}, & x \geq -2\ln(\beta/2). \end{cases}$$

Verteilungsfunktion des Summenrisikos für LF-Copula-Repräsentant  $\mathbf{V}$  (worst case)

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

Beispiel 1: Zwei standard-exponentialverteilte Risiken mit lokalen uniformen Patchworkverteilungen:



Verteilungsfunktionen des Summenrisikos ohne (blau) und mit Copulas (rot wie vor, grün (worst case)),  $\beta = 0,005$  (Solvency II-Standard)

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Beispiel 2** : Zwei Pareto-verteilte Risiken mit  $F_1 = F_2 = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0. \end{cases}$  und lokalen uniformen

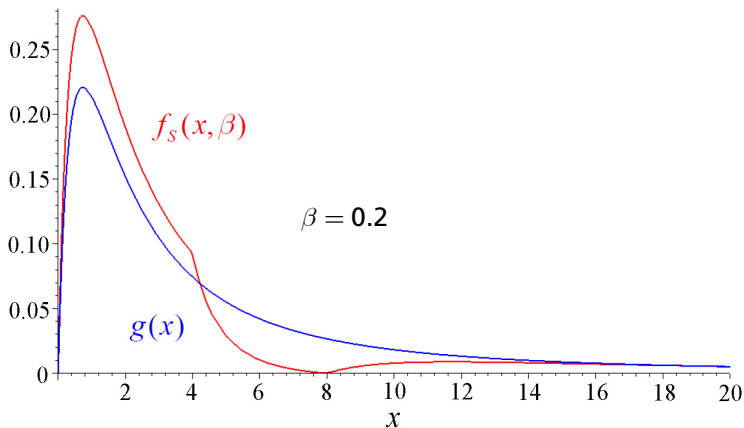
Patchwork-Variablen **U** und **V**:

$$F_S(x, \beta) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 2\ln(1+x)}{(2+x)^2(1-\beta)}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\beta} - 1 \\ \frac{(1-2\beta)x^2 + (4-6\beta)x - 4\beta + 4 + 2\ln(\beta x + 2\beta - 1)}{(2+x)^2(1-\beta)}, & \frac{1}{\beta} - 1 \leq x \leq 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \\ \frac{x^2 - 2x + \frac{2}{\beta}\ln(\beta x + 2\beta - 1)}{(2+x)^2}, & x \geq 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right). \end{cases}$$

Verteilungsfunktion des Summenrisikos unter Patchwork-Copula

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Beispiel 2:** Zwei Pareto-verteilte Risiken mit lokalen uniformen Patchwork-Variablen **U** und **V**:



Dichten des Summenrisikos ohne (blau) und mit Copula (rot)

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Beispiel 2:** Zwei Pareto-verteilte Risiken mit Patchwork-Copula:

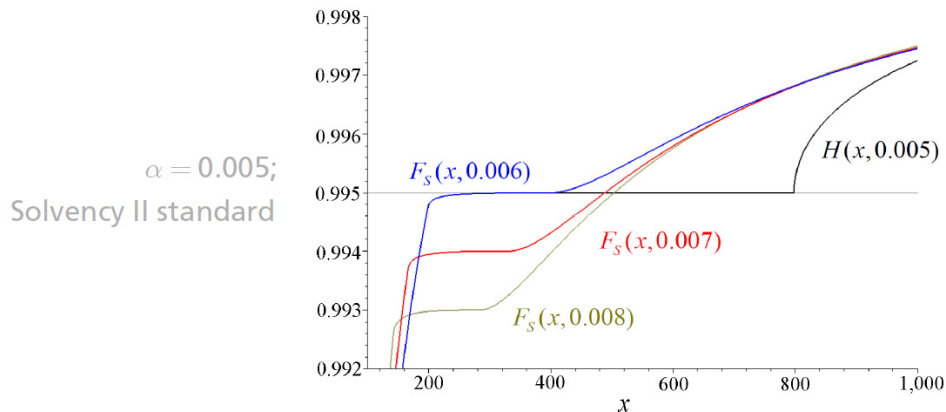
$$H(x, \beta) = \begin{cases} F_S(x, \beta), & x \leq \frac{2}{\beta} - 2 \\ 1 - \beta, & \frac{2}{\beta} - 2 \leq x \leq \frac{4}{\beta} - 2 \\ 1 - \beta + \sqrt{\beta^2 - \frac{4\beta}{2+x}}, & x \geq \frac{4}{\beta} - 2. \end{cases}$$

Verteilungsfunktion des Summenrisikos für LF-Copula-Repräsentant  $\mathbf{V}$  (worst case)



## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Beispiel 2:** Zwei Pareto-verteilte Risiken mit lokalen uniformen Patchwork-Verteilungen:



Verteilungsfunktionen des Summenrisikos mit Copulas,  $H =$  worst case

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

**Allgemeine Situation in  $d$  Dimensionen: *Fast ungünstigste* Patchwork-Copulas:**

**Lemma.** Für  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d > 1$  sei  $\mathbf{I}_d$  die  $d$ -dimensionale Einheitsmatrix,  $\mathbf{e}_d = (1, \dots, 1)$ , and  $\mathbf{E}_d = \mathbf{e}_d^{\text{tr}} \mathbf{e}_d$  die  $d \times d$  Matrix, deren Einträge sämtlich 1 sind. Dann ist

$\Sigma_d = (1-r)\mathbf{I}_d + r\mathbf{E}_d$  eine Korrelationsmatrix genau dann, wenn  $-\frac{1}{d-1} \leq r \leq 1$ . Die

Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\Sigma_d$  sind gegeben durch  $\lambda_1 = 1 + (d-1)r$  und  $\lambda_i = 1 - r$ ,  $i = 2, \dots, d$ .

Eine Orthonormalbasis  $T_1, \dots, T_d$  zugehöriger Eigenvektoren ist gegeben durch

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{d}} \mathbf{e}_d^{\text{tr}} \quad \text{und} \quad T_j = (t_{1j}, \dots, t_{dj})^{\text{tr}} \quad \text{für} \quad 2 \leq j \leq d \quad \text{mit} \quad t_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} \quad \text{für} \quad 1 \leq i < j,$$

$$t_{ij} = \sqrt{\frac{j-1}{j}} \quad \text{für} \quad j = i \quad \text{und} \quad t_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad j < i.$$

Hieraus folgt  $\Sigma_d = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\text{tr}}$  mit  $\mathbf{A} = \mathbf{T}\sqrt{\Delta}$  wobei  $\mathbf{T} = [T_1, \dots, T_d]$  und  $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ .

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

Anmerkung:  $\Sigma_d$  ist eine spezielle symmetrische Toeplitz-Matrix, daher können die Eigenwerte und Eigenvektoren auch folgendermaßen dargestellt werden:

$$\lambda_j^* = 1 + r \sum_{i=1}^{d-1} \cos\left(\frac{2\pi ij}{d}\right) = \begin{cases} 1 - r, & j = 1, \dots, d-1 \\ 1 + (d-1)r, & j = d \end{cases}$$

und

$$t_{ij}^* = \frac{\cos\left(\frac{2\pi ij}{d}\right) + \sin\left(\frac{2\pi ij}{d}\right)}{\sqrt{d}}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

Wir werden im folgenden eine Gauß-Copula mit der Korrelationsmatrix  $\Sigma_d = \frac{d}{d-1} \mathbf{I}_d - \frac{1}{d-1} \mathbf{E}_d$  für  $r = -\frac{1}{d-1}$  eine *minimal korrelierte Gauß-Copula* nennen.

Man beachte dabei, dass  $\Sigma_d$  singularär ist. Für  $d = 2$  ist die minimal korrelierte Gauß-Copula identisch mit der unteren Fréchet-Schranke  $\mathcal{W}^2$ .

Eine minimal korrelierte Gauß-Copula kann also in gewissem Sinn als multivariate Verallgemeinerung der unteren Fréchet-Hoeffding-Schranke  $\mathcal{W}^2$  angesehen werden.

Alle bivariaten Teilcopulas einer minimal korrelierten Gauß-Copula mit dem Repräsentanten  $\mathbf{U}$  besitzen einen oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten

$$\lambda_U := \lim_{t \rightarrow 1^-} P(U_1 > t | U_2 > t) = 0.$$

Für *fast ungünstigste* Patchwork-Copulas werden wir im Folgenden für die Verteilung von  $\mathbf{V}$  eine minimal korrelierte Gauß-Copula verwenden.

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### Fast ungünstigste Patchwork-Copulas:

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)

Year	Area 1	Area 2	Area 3	Area 4	Area 5	Area 6	Area 7	Area 8	Area 9	Area 10
1	23.664	154.664	40.569	14.504	10.468	7.464	22.202	17.682	12.395	18.551
2	1.080	59.545	3.297	1.344	1.859	0.477	6.107	7.196	1.436	3.720
3	21.731	31.049	55.973	5.816	14.869	20.771	3.580	14.509	17.175	87.307
4	28.99	31.052	30.328	4.709	0.717	3.530	6.032	6.512	0.682	3.115
5	53.616	62.027	57.639	1.804	2.073	4.361	46.018	22.612	1.581	11.179
6	29.95	41.722	12.964	1.127	1.063	4.873	6.571	11.966	15.676	24.263
7	3.474	14.429	10.869	0.945	2.198	1.484	4.547	2.556	0.456	1.137
8	10.020	31.283	21.116	1.663	2.153	0.932	25.163	3.222	1.581	5.477
9	5.816	14.804	128.072	0.523	0.324	0.477	3.049	7.791	4.079	7.002
10	170.725	576.767	108.361	41.599	20.253	35.412	126.698	71.079	21.762	64.582
11	21.423	50.595	4.360	0.327	1.566	64.621	5.650	1.258	0.626	3.556
12	6.380	28.316	3.740	0.442	0.736	0.470	3.406	7.859	0.894	3.591
13	124.665	33.359	14.712	0.321	0.975	2.005	3.981	4.769	2.006	1.973
14	20.165	49.948	17.658	0.595	0.548	29.350	6.782	4.873	2.921	6.394
15	78.106	41.681	13.753	0.585	0.259	0.765	7.013	9.426	2.180	3.769
16	11.067	444.712	365.351	99.366	8.856	28.654	10.589	13.621	9.589	19.485
17	6.704	81.895	14.266	0.972	0.519	0.644	8.057	18.071	5.515	13.163
18	15.550	277.643	26.564	0.788	0.225	1.230	26.800	64.538	2.637	80.711
19	10.099	18.815	9.352	2.051	1.089	6.102	2.678	4.064	2.373	2.057
20	8.492	138.708	46.708	3.680	1.132	1.698	165.600	7.926	2.972	5.237

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### Fast ungünstigste Patchwork-Copulas:

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)

Year	Area 11	Area 12	Area 13	Area 14	Area 15	Area 16	Area 17	Area 18	Area 19
1	1.842	4.100	46.135	14.698	44.441	7.981	35.833	10.689	7.299
2	0.429	1.026	7.469	7.058	4.512	0.762	14.474	9.337	0.740
3	0.209	2.344	22.651	4.117	26.586	3.920	13.804	2.683	3.026
4	0.521	0.696	31.126	1.878	29.423	6.394	18.064	1.201	0.894
5	2.715	1.327	40.156	4.655	104.691	28.579	17.832	1.618	3.402
6	4.832	0.701	16.712	11.852	29.234	7.098	17.866	5.206	5.664
7	0.268	0.580	11.851	2.057	11.605	0.282	16.925	2.082	1.008
8	0.741	0.369	3.814	1.869	8.126	1.032	14.985	1.390	1.703
9	0.524	6.554	5.459	3.007	8.528	1.920	5.638	2.149	2.908
10	9.882	6.401	106.197	44.912	191.809	90.559	154.492	36.626	36.276
11	1.052	8.277	22.564	8.961	19.817	16.437	25.990	2.364	6.434
12	0.136	0.364	28.000	7.574	3.213	1.749	12.735	1.744	0.558
13	1.990	15.176	57.235	23.686	110.035	17.373	7.276	2.494	0.525
14	0.630	0.762	25.897	3.439	8.161	3.327	24.733	2.807	1.618
15	0.770	15.024	36.068	1.613	6.127	8.103	12.596	4.894	0.822
16	0.287	0.464	24.211	38.616	51.889	1.316	173.080	3.557	11.627
17	0.590	2.745	16.124	2.398	20.997	2.515	5.161	2.840	3.002
18	0.245	0.217	12.416	4.972	59.417	3.762	24.603	7.404	19.107
19	0.415	0.351	10.707	2.468	10.673	1.743	27.266	1.368	0.644
20	0.566	0.708	22.646	6.652	14.437	63.692	113.231	7.218	2.548

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### **Fast ungünstigste Patchwork-Copulas:**

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)

Randverteilungen lassen sich gut durch Lognormalverteilungen schätzen mit

Parameter	Area 1	Area 2	Area 3	Area 4	Area 5	Area 6	Area 7	Area 8	Area 9	Area 10
$\mu_k$	2.8063	4.0717	3.1407	0.6375	0.3984	1.2227	2.3210	2.2123	1.0783	2.1055
$\sigma_k$	1.2161	1.0521	1.2110	1.5685	1.2998	1.5987	1.1980	0.9882	1.1445	1.2531

Parameter	Area 11	Area 12	Area 13	Area 14	Area 15	Area 16	Area 17	Area 18	Area 19
$\mu_k$	-0.3231	0.3815	3.0198	1.7488	3.0409	1.5501	3.0700	1.2444	0.9378
$\sigma_k$	1.0881	1.3353	0.8027	1.0033	1.1221	1.4765	0.9622	0.8577	1.2141

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### Fast ungünstigste Patchwork-Copulas:

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16	A17	A18	A19
A1	1	0.27	0.30	0.16	0.17	0.45	0.28	0.32	0.32	0.29	0.67	0.51	0.76	0.34	0.67	0.74	0.18	0.21	0.29
A2	0.27	1	0.48	0.66	0.39	0.37	0.71	0.69	0.52	0.64	0.30	-0.02	0.45	0.66	0.58	0.45	0.73	0.74	0.78
A3	0.30	0.48	1	0.70	0.40	0.31	0.42	0.51	0.58	0.53	0.18	0.07	0.21	0.32	0.54	0.26	0.47	0.21	0.57
A4	0.16	0.66	0.70	1	0.77	0.47	0.46	0.47	0.59	0.49	0.18	0.33	0.33	0.50	0.47	0.18	0.76	0.43	0.54
A5	0.17	0.39	0.40	0.77	1	0.59	0.30	0.20	0.49	0.39	0.28	0.08	0.35	0.56	0.44	0.16	0.55	0.36	0.41
A6	0.45	0.37	0.31	0.47	0.59	1	0.14	0.01	0.36	0.34	0.33	0.12	0.48	0.46	0.48	0.37	0.59	0.17	0.50
A7	0.28	0.71	0.42	0.46	0.30	0.14	1	0.52	0.27	0.40	0.45	-0.07	0.31	0.31	0.46	0.62	0.63	0.58	0.57
A8	0.32	0.69	0.51	0.47	0.20	0.01	0.52	1	0.64	0.81	0.27	-0.02	0.38	0.35	0.56	0.35	0.28	0.62	0.63
A9	0.32	0.52	0.58	0.59	0.49	0.36	0.27	0.64	1	0.78	0.40	0.19	0.27	0.50	0.44	0.30	0.33	0.57	0.61
A10	0.29	0.64	0.53	0.49	0.39	0.34	0.40	0.81	0.78	1	0.21	-0.02	0.21	0.37	0.52	0.30	0.31	0.53	0.81
A11	0.67	0.30	0.18	0.18	0.28	0.33	0.45	0.27	0.40	0.21	1	0.47	0.49	0.45	0.60	0.67	0.20	0.45	0.39
A12	0.51	-0.02	0.07	0.15	0.08	0.12	-0.07	-0.02	0.19	-0.02	0.47	1	0.44	0.21	0.24	0.46	0.52	0.25	0.05
A13	0.76	0.45	0.21	0.33	0.35	0.48	0.31	0.38	0.27	0.21	0.49	0.44	1	0.55	0.60	0.71	0.37	0.39	0.24
A14	0.34	0.66	0.32	0.50	0.56	0.46	0.31	0.35	0.50	0.37	0.45	0.21	0.55	1	0.59	0.43	0.57	0.58	0.53
A15	0.67	0.58	0.54	0.47	0.44	0.48	0.46	0.56	0.44	0.52	0.60	0.24	0.60	0.59	1	0.59	0.36	0.35	0.63
A16	0.74	0.45	0.26	0.18	0.16	0.37	0.62	0.35	0.30	0.30	0.67	0.46	0.71	0.43	0.59	1	0.38	0.43	0.39
A17	0.18	0.73	0.47	0.76	0.55	0.59	0.63	0.28	0.33	0.31	0.20	0.37	0.57	0.36	0.38	0.38	1	0.52	0.56
A18	0.21	0.74	0.21	0.43	0.36	0.17	0.58	0.62	0.57	0.53	0.45	0.25	0.39	0.58	0.35	0.43	0.52	1	0.60
A19	0.29	0.78	0.57	0.54	0.41	0.50	0.57	0.63	0.61	0.81	0.39	0.05	0.24	0.53	0.63	0.39	0.56	0.60	1

Empirische Korrelationen der logarithmierten Verluste

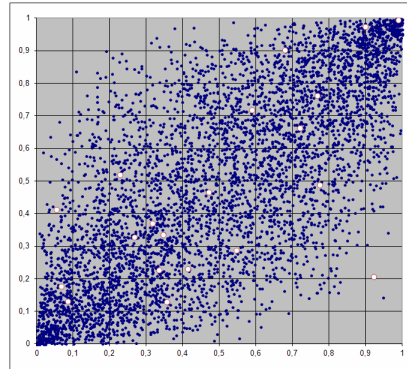
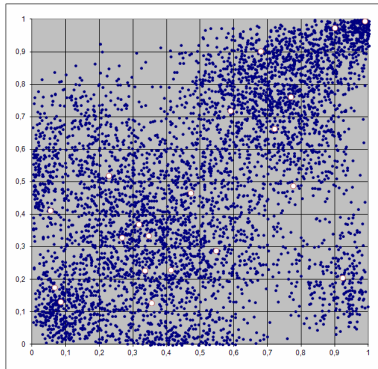
gelb: hoch, grün: gering



## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### *Fast ungünstigste* Patchwork-Copulas:

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)



A3 vs. A4:

Bernstein-Copula

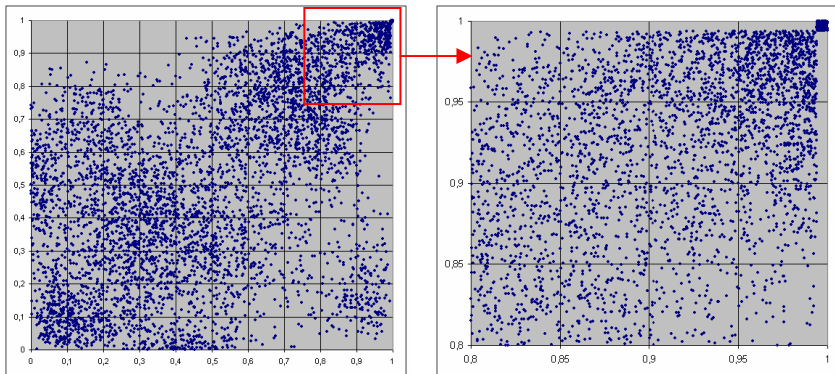
Gauß-Copula

weiß: empirische Copula-Punkte

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### *Fast ungünstigste* Patchwork-Copulas:

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)



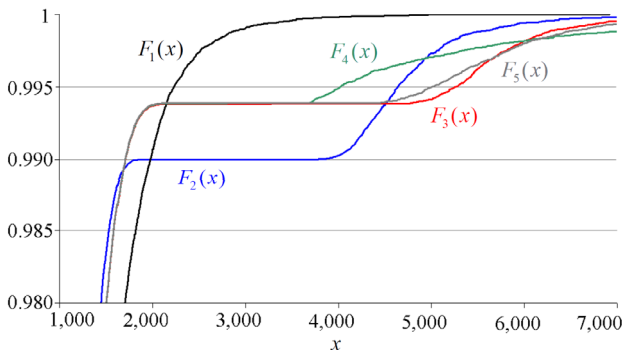
A3 vs. A4:

Bernstein-Patch-Copula mit uniformem  $\mathbf{V}$ ,  $\rho = 0.994$

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### Fast ungünstigste Patchwork-Copulas:

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)



U: Bernstein-Copula, V: min korr Gauß-Copula:  $\rho = 1$  [ $F_1(x)$ ];  $\rho = 0.99$  [ $F_2(x)$ ];  $\rho = 0.994$  [ $F_3(x)$ ]

U: Bernstein-Copula mit  $\rho = 0.994$  und V: Copulas  $\mathcal{M}^d$  [ $F_4(x)$ ]; Unabhängigkeitscopula [ $F_5(x)$ ]

## 5. Ungünstige Patchwork-Copulas

### **Fast ungünstigste Patchwork-Copulas:**

Beispiel: 19-dimensionaler Datensatz (Naturgefahren, Mitteleuropa)

$\rho$	1	0.990	0.994	0.994	0.994
$\mathbf{V}$	----	min korr Gauss	min korr Gauss	$\mathcal{M}^d$	uniform
$\text{VaR}_\alpha$	2.256 Mio.	4.647 Mio.	5.272 Mio.	3.976 Mio.	5.018 Mio.

$$\alpha = 0.005$$

Für eine reine Gauß-Copula ergibt sich:  $\text{VaR}_\alpha = 2.505$  Mio.

## 6. Literatur

## 6. Literatur

BLUMENTRITT (2012): On Copula Density Estimation and Measures of Multivariate Association. Reihe Quantitative Ökonomie, Band 171, Eul-Verlag, Lohmar.

COTTIN UND PFEIFER (2014): From Bernstein polynomials to Bernstein copulas. Journal of Applied Functional Analysis, 277 - 288.

EMBRECHTS, PUCETTI AND RÜSCHENDORF (2013): Model uncertainty and VaR aggregation. Journal of Banking and Finance 37: 2750 – 2764.

HUMMEL UND MÄRKERT (2012): Stochastische Risikoaggregation. In: Bennemann et al. (Hrsg.): Handbuch Solvency II. Von der Standardformel zum Internen Modell, vom Governance-System zu den MaRisk VA, Schäffer-Poeschl, Stuttgart, 203 - 219.

GHOSH UND HENDERSON (2009): Patchwork distributions. In: C. Alexopoulos et al. (Eds.): Advancing the Frontiers of Simulation: A Festschrift in Honor of George Samuel Fishman, Springer, N.Y., 65 – 86.

KULPA (1999): On approximation of copulas. Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 22, No. 2 (1999) 259–269.

LI, MIKUSIŃSKI UND TAYLOR (1998): Strong Approximation of Copulas. J. Math. Analysis and Appl. 225, 608–623.

## 6. Literatur

JOE, H. (2015): Dependence Modeling with Copulas. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton.

MCNEIL, FREY UND EMBRECHTS (2005): Quantitative Risk Management. Concepts - Techniques - Tools. Princeton Univ. Press, Princeton.

MAI UND SCHERER (2012): Simulating Copulas. Stochastic Models, Sampling Algorithms, and Applications. Imp. College Press, London.

NELSEN (2006): An Introduction to Copulas. Springer, N.Y., 2<sup>nd</sup> ed.

PFEIFER, MÄNDLE, AWOUMLAC TSATEDEM UND GIRSCHIG (2016): New copulas based on general partitions-of-unity and their applications to risk management. Dependence Modeling (2016), 123 – 140.

PFEIFER, MÄNDLE UND RAGULINA (2017): New copulas based on general partitions-of-unity and their applications to risk management (part II). Dependence Modeling (2017), 246 – 255.

PFEIFER, MÄNDLE, RAGULINA UND GIRSCHIG (2019): New copulas based on general partitions-of-unity (part III) – the continuous case. Dependence Modeling (2016), 181 – 201.

## 6. Literatur

PFEIFER UND RAGULINA (2020): Adaptive Bernstein copulas and risk management. *Mathematics* 2020, 8, 2221.

PFEIFER UND RAGULINA (2021): Generating unfavourable VaR scenarios under Solvency II with patchwork copulas. *Dependence Modeling* (2021), 327- 346.

PUCETTI UND RÜSCHENDORF (2012): Computation of sharp bounds on the distribution of a function of dependent risks. *J. Comp. Appl. Math.* 236, 1833 - 1840.

PUCETTI UND WANG (2015): Detecting complete and joint mixability. *J. Comp. Appl. Math.* 280, 174 - 187.

RANK (2006): *Copulas: From Theory to Application in Finance*. RISK Books, London.