Algebra I 19.4.2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 1

(1) Sei D eine nichtleere Menge und $M = \{f : D \to D\} = Abb(D, D)$.

   (a) Zeigen Sie: M ist bzgl. der Hinereinanderausführung von Abbildungen ein Monoid.

   (b) Kann es vorkommen, dass M eine Gruppe wird?

   (c) Bestimmen Sie das Zentrum
   $Z(M) = \{g \in M : \forall f \in M : f \circ g = g \circ f\}$.

(2) (nach Jacobson Basic Algebra p. 30)

Sei A ein nichtleeres Alphabet (z. B. das lateinische) und zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei $W_n = \{$ "Worte" der Länge $n\}$. Dabei ist unabhängig von Bedeutungen jede Kombination $a_1 \ldots, a_n$ von Buchstaben $a_i \in A$ zugelassen als Wort.

Beobachtet werde die folgende Verknüpfung auf W_n :

$$a_1 \ldots a_n \circ b_1 \ldots b_n := a_{i_1} \ldots a_{i_r}\ b_{j_1} \ldots b_{j_s}$$

wobei $r \geq 1$, $s \geq 1$, $r + s = n$ und $i_1, \ldots, i_r$, $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}$.

Geben Sie Bedingungen an dafür, dass eine Halbgruppe entsteht. Kann u. U. auch ein Monoid entstehen?

(3) In dem euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt $((\cdot, \cdot))$ sei $K = \{v \in \mathbb{R}^2 : ((v, v)) = 1\}$ der sogenannte Einheitskreis.

Seien $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ gleichabständige Punkte auf K und $v^{(1)} = (1, 0)$. Bestimmen Sie die Untergruppe G_Δ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller orthogonalen 2×2-Matrizen, deren zugehörige lineare Abbildung (bzgl. der kanonischen Basis) die Menge $\{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}$ in sich abbildet.