

Aufgabenblatt 11

- (43) Aufgabe (23) wird nochmals gestellt.
- (44) Begründen Sie anhand der Ergebnisse aus §18, dass in einem Körper K mit 64 Elementen, der o. E. \mathbb{Z}_2 enthalte, jedes Polynom aus $\mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad ≤ 3 eine Nullstelle besitzt, aber kein Primpolynom höheren Grades mit Grad $\neq 6$.
- (45) Berechnen Sie die gleichgradige Zerlegung von $x^{64} - x$ in $\mathbb{Z}_2[x]$. Bei Beachtung der Ergebnisse in §18 lässt sich die Arbeit stark reduzieren. Bei Vermeidung überflüssiger Schritte sind die Rechnungen noch mit Hand zu bewältigen. Bequemer ist es natürlich, wenn Sie etwa in Maple mit den Anweisungen

$\text{Gcd}(f,g) \bmod 2$; und $\text{Rem}(f,g,x) \bmod 2$;

arbeiten. Das verleitet aber dann dazu, sich nicht mehr zu überlegen, wie man den Aufwand reduzieren kann im Fall des speziellen Polynoms $x^{64} - x$. Versuchen Sie daher, die Aufgaben so zu bearbeiten, dass Sie nur einmal eine der beiden obigen Anweisungen in Maple benutzen und die übrigen Berechnungen per Hand erledigen.

- (46) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $\pi_c : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{C}$ der zugehörige Einsetzungsmorphismus. Zeigen Sie:

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[c] < \infty \Leftrightarrow \pi_c \text{ ist nicht injektiv.}$$

Anleitung zu " \Leftarrow ": Ist c eine Nullstelle von h , dann gilt z. B.: $\pi_c(x^k) = \pi_c(\varrho_h(x^k))$.