Algebra I 12. 7. 2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 13

(51) Sei L ein Zerfällungskörper über K des Polynoms $f \in K[x]\backslash K$ mit $n = \deg f$. Zeigen Sie:

$$[L : K] \leq n\,!$$

(52) Zeigen Sie: Für gerade $n > 2$ hat $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ einen nichtlinearen Primteiler.

(53) Sei $L := \mathbb{Z}_p(x, y)$ Quotientenkörper des Polynomrings in zwei Variablen $\mathbb{Z}_p[x, y]$ und sei $K := \mathbb{Z}_p(x^p, y^p)$ Quotientenkörper von $\mathbb{Z}_p[x^p, y^p]$ innerhalb L. Zeige:

(a) $[L : K] = p^2$

(b) Für alle $a \in L\backslash K$ ist $[K[a] := K] = p$. Daher ist L keine einfache Erweiterung von K.

(c) Es gibt unendlich viele Unterkörper von L.

[Anleitung: Schreibe $K[X]$ für den Polynomring über K; zu (a): $f = X^p - x^p \in \mathbb{Z}_p[x^p][X]$, Eisenstein, Aufgabe (52); zu (b): a^p; zu (c): $b \in L\backslash K[a]$.]

(54) Sei $N = \{a \in \mathbb{C} : \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[a] = 2\}$ und $P = \{\sqrt{p} : p \text{ Primzahl }\} \cup \{\sqrt{-1}\}$. Zeigen Sie:

(a) $K[N]$, $K[P]$ sind Körper

(b) $K(N) = K(P)$

(c) Die $\mathbb{Q}$-Dimension jedes endlichen Zwischenkörpers Z, $\mathbb{Q} \subseteq Z \subseteq K(P)$ ist eine Potenz von 2.