Algebra I 26.4.2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 2

(4) **Konjugation.** Sei G eine Gruppe. $a, b \in G$ heißen konjugiert (oder ähnlich) in Zeichen $a \approx b$, wenn mit einem $c \in G$ gilt: $c\,a = b\,c$.

(a) Zeigen Sie: $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen Konjugiertenklassen oder Ähnlichkeitsklassen.

(b) Zu festem $a \in G$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_a : G \to G$ mit $\varphi_a(x) = a\,x\,a^{-1}$ für alle $x \in G$. Zeigen Sie: φ_a ist ein Gruppenautomorphismus.

(c) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi : G \to S(G),\ a \mapsto \varphi_a$ ist ein Gruppenmorphismus und $\mathsf{Kern}\ \varphi = Z(G)$.

(5) Sei $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Welche Ordnung hat die von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } GL(3, \mathbb{C})$$

erzeugte Untergruppe G und welche Ordnung hat ihr Zentrum? [1]

Anleitung: z. B. $BAB^{-1} = \alpha A$.

(6) (a) Bestimmen Sie die Ähnlichkeitsklassen für die Gruppe aus Aufgabe (3) und beschreiben Sie diese geometrisch.

(b) Bestimmen Sie die Ähnlichkeitsklassen für die Gruppe aus Aufgabe (5).

(7) Zeigen Sie:

Sind a, b Elemente endlicher Ordnung in einer Gruppe G und gilt $< a > \cap < b > = \{1\}$, dann enthält $< a, b >$ mindestens $\mathsf{ord}(a) \cdot \mathsf{ord}(b)$ Elemente. Konstruieren Sie ein Beispiel, wo $< a, b >$ genau $\mathsf{ord}(a) \cdot \mathsf{ord}(b)$ Elemente enthält und eines, wo $< a, b >$ noch mehr Elemente enthält.

[1] Teil einer Übungsaufgabe aus Saarbrücken (WiSe 2003/2004)