Algebra I 3.5.2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 3

(8) [1] Nebenklassen und Normalteiler. Seien U, V, H Untergruppen und K ein Normalteiler der Gruppe G. Zeigen Sie:

(a) Wenn die Menge der Linksnebenklassen von H dieselbe ist wie die Menge der Rechtsnebenklassen, dann ist H ein Normalteiler.

(b) $\forall a, b \in G : (aK) \cdot (bK) = (ab)K$
Dabei ist $M \cdot N = \{mn : m \in M, n \in N\}$ für Teilmengen M, N von G.

(c) $U \cdot K = K \cdot U$

(d) $\forall a \in G : a(U \cap V) = aU \cap aV$

(e)[2] Sind $[G : U]$, $[G : V]$, $[G : U \cap V]$ die (möglicherweise unendlichen) Anzahlen der Linksnebenklassen von U, V, bzw. $U \cap V$ in G, dann gilt: $[G : U] < \infty$ und $[G : V] < \infty \;\Rightarrow [G : U \cap V] < \infty$
(Satz von Poincaré)

Bei (b) soll nur die Definition 6 von §4 benutzt werden.

(9) [3] Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $a \circ b = a + b - ab$. Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{Z}, \circ, 0)$ ein Monoid ist, und dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\varphi(a) = 1 - a$ ein Monoidisomorphismus ist mit dem Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$

(10) Sei K ein Körper (wenn Sie wollen: $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) mit mindestens 5 Elementen.

Sei $D = K \backslash \{0, 1\}$ und seien $f, g \in S(D)$ gegeben durch die Vorschrift $f(x) = 1 - x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in D$.

Untersuchen Sie die Untergruppe $< f, g >$ in $S(D)$ (Ordnung, Zentrum, Untergruppen, Normalteiler).

---

[1] teilweise nach van der Warden, Algebra 1
[2] Nach Ex 3 p. 53 in Jacobson, Basic Algebra 1
[3] Nach Ex 6 p. 39 in Jacobson, Basic Algebra 1