Algebra I 10.5.2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 4

(11) Zeigen Sie

(a) $(\mathbb{Z}_d,\ \oplus,\ 0)$ ist eine abelsche Gruppe und $\varrho_d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_d$ ist ein surjektiver Gruppenmorphismus.
Anleitung: Für $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $z \in \mathbb{Z}$ gilt: $\varrho_d(z + dq) = \varrho_d(z)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $\varrho_d(z) = z + dq$ für ein $q \in \mathbb{Z}$.

(b) $(\mathbb{Z}_d,\ \oplus,\ 0)$ ist isomorph zur Untergruppe $< e^{\frac{2\pi i}{d}} >$ des Monoids $(\mathbb{C},\ \cdot,\ 1)$ und beide Gruppen sind isomorph zu $\mathbb{Z}/_{d\mathbb{Z}}$.
Anleitung: Benutze Satz 11 aus §4.

(c) Die von $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $(\mathbb{Q}^{2\times 2},\ \cdot, E)$ erzeugte Untergruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

(12) Sei G eine Gruppe, R eine Teilmenge von G und

$$K(R) = \bigcap_{\substack{N \text{ Normalteiler} \\ R \subseteq N}} N$$

Zeigen Sie:

(a) $K(R)$ ist Normalteiler.

(b) Ist $f : G \to H$ ein Gruppenmorphismus und ist R Teilmenge des Kerns von f, dann folgt

$$K(R) \subseteq \text{Kern } f.$$

(c) Sei $a \in G$ und $R = \{a\}$. Beschreiben Sie $K(a) := K(R)$.

(d) Sei $G = S_3$. Bestimmen Sie $K(\tau_{12})$ und $K(\tau_{12}\tau_{23})$.

(13) Seien T_1, T_2 nichtleere Teilmengen der multiplikativ geschriebenen Monoide M_1, M_2 und gelte $M_1 =< T_1 >$, $M_2 =< T_2 >$. Zeigen Sie:

(a) $M := M_1 \times M_2$ ist bezüglich komponentenweiser Multiplikation wieder ein Monoid.

(b) Mit $T = T_1' \cup T_2'$, $T_1' = \{(t, 1) : t \in T_1\}$, $T_2' = \{(1, t) : t \in T_2\}$ gilt $M =< T >$.

(c) Selbst wenn $M_1 = FM(T_1)$, $M_2 = FM(T_2)$, dann ist M nicht frei erzeugt von T.

Noch mehr Lust auf Gruppen? Dann können Sie sich noch mit folgenden beiden Aufgaben befassen:

(14) Sei $Q =< A, B >$ mit $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ in $C^{2\times 2}$. Zeigen Sie:

(a) Q ist nicht isomorph zur Gruppe $G_\square$ aus den Präsenzübungen.
Es lohnt sich, dabei die Elemente der Ordnung 2 anzusehen.

(b) Q ist frei erzeugt von A, B mit definierenden Relationen $A^4 = 1$, $A^2 = B^2$, $BAB^{-1} = A^{-1}$. Sie können dabei analog Beispiel 3 in § 5 vorgehen.

Q ist die sogenannte **Quaternionengruppe.**

(15) Alle Gruppen der Ordnung ≤ 5 sind kommutativ.