Algebra I 17.5.2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 5

(16) ($\mathbb{Q}$, $+$, 0) ist keine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Anleitung: mit $q_1, \ldots, q_n$ enthält eine Untergruppe von $\mathbb{Q}$ auch alle $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen. Beobachten Sie die Menge der Primzahlen, die in den Nennern einer endlich erzeugten Untergruppe vorkommen. Benennen Sie in Ihrer Bearbeitung die Eigenschaften natürlicher Zahlen, die Sie benutzen.

(17) Weisen Sie die im Beispiel 3 in § 6 aufgestellte Behauptung nach: $\mathbb{H}$ **ist ein Schiefkörper**, ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und ein 2-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(18) Bestimmen Sie den Kern des Ringmorphismus

$$\Phi : \mathbb{Z}_3[x] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3), \quad p = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \mapsto f_p$$

Dabei ist $f_p(\alpha) = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i \alpha^i$ für $\alpha \in \mathbb{Z}_3$.

Erinnern Sie sich dabei an den für Polynome geforderten Identitätssatz, der hier besagt:

$$\forall d \in \mathbb{N}\ \forall a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}_3 : \quad \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = 0 \Leftrightarrow a_0 = \cdots = a_d = 0.$$

Anleitung: Suchen Sie ein Polynom $g \in \mathbb{Z}_3[x]$ kleinsten Grades (Nachweis) mit den Nullstellen $-1, 0, 1$ in $\mathbb{Z}_3$. Dann ist $f_g = 0$. Division mit Rest.

(19) Sei $R = K^{n \times n}$, K ein Körper.

(a) Zeigen Sie: Jedes Linksideal in R hat die Form RA, $A \in R$ geeignet gewählt.
Anleitung: Jedes Linksideal $\neq 0$ enthält Matrizen mit nur einer Zeile $\neq 0$. Die so vorkommenden Zeilen bilden einen Untervektorraum. Eine Basis und elementare Umformungen „erzeugen“ das Linksideal.

(b) R besitzt keine (zweiseitigen) Ideale $\neq \{0\}$ und $\neq R$.