Algebra I 7.6.2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 8

(30) Sei $f \in \mathbb{Z}[x] \backslash \mathbb{Z}$ ein Polynom mit höchstem Koeffizienten 1. Zeigen Sie einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gauß-Lemmas, dass f in $\mathbb{Q}$ nur ganzzahlige Nullstellen hat.

(31) Klären Sie (mit Angabe Ihrer Überlegungen), ob die folgenden Polynome unzerlegbar sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & x^5 + 3x^2 + 6x + 3 \\ \text{(b)} & 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \\ \text{(c)} & x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 11 \end{array}\right\} \text{ in } \mathbb{Q}[x]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(d)} & x^2y^3 + 6xy^3 + 9y^3 - y^2 + x^2y + 5xy + 6y - x - 7 \\ \text{(e)} & x^4 + y^2x^3 + (y+1)x^2 + 1 \end{array}\right\} \text{ in } \mathbb{Q}[x,y]$$

(f) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \quad$ in $\mathbb{F}_4[y]$

(32) Beispiel 14.8

Es sollen nicht nur Ergebnisse angegeben, sondern auch der Rechenweg lesbar dargelegt werden.

(33) (a) Zeigen Sie: Ist $\Phi : S \to T$ ein Ringisomorphismus, dann auch die Umkehrabbildung Φ^{-1}.

(b) Seien R ein kommuntativer Ring, $R[y]$ Polynomring und $a \in R$.
Zeigen Sie:
Der Einsetzungsmorphismus $\pi_{y+a} : R[y] \to R[y]$ ein Isomorphismus und $\pi_{y+a}^{-1} = \pi_{y-a}$
(... z. B. indem Sie zuerst zeigen: $\pi_{y+a} \circ \pi_{y-a} = id_{R[y]} = \pi_{y-a} \circ \pi_{y+a}$)
Mit dieser Aufgabe ist zugleich Satz 13.8(b) bewiesen.

(34) Umkehrung von Satz 10.3:

Zeigen Sie: In einem faktoriellen Ring R ist die Menge $\mathcal{H}(R)$ der Hauptideale von R Noethersch und unzerlegbare Elemente sind prim.

Empfohlen: mindestens 3 Aufgaben.