Algebra I 14.6.2004
SoSe 2004
Schmale

Aufgabenblatt 9

(35) (ehemalige Klausuraufgabe 1. Staatsexamen) Zeigen Sie:

Für alle $m \in \mathbb{N}_+$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : \varphi(n) = m\}$ endlich.

(36) (a) Benutzen Sie die klassische Lagrangeinterpolation, um zu entscheiden, ob es ein Polynom f in $\mathbb{Q}[x]$ von Grad 4 gibt, mit den Eigenschaften:

$$f(-2) = 1,\ f(-1) = 0,\ f(0) = 1,\quad f(1) = 4,\quad f(2) = 9$$

(b) Bestimmen Sie nach dem Newtonverfahren ein Polynom kleinsten Grades f in $\mathbb{Q}[x]$ mit den Eigenschaften:

$$f(i^k) = (k-2)^2 \qquad \text{für } 0 \leq k \leq 2$$

(c) Gibt es ein $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit den Eigenschaften:

$$f(-1) = 1,\ f(0) = 1,\ f(1) = 2\ ?$$

(37) In $\mathbb{C}[x]$ sei $\Phi_n := \prod\limits_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ \mathsf{ord}(\lambda)=n}} (x - \lambda)$. Bestimmen Sie $\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3$ und zeigen Sie:

(a) Grad $\Phi_n \leq n$

(b) $x^n - 1 = \prod_{t|n} \Phi_t$

(c) $\Phi_n \in \mathbb{Z}[x]$.
Anleitung: Division mit Rest, Induktion nach n.

(38) Binomische Formeln über einem Ring mit positiver Charakteristik.

Sei R ein kommutativer Ring und $R[x, y]$ Polynomring in zwei unabhängigen Unbestimmten (d.h. die Menge der Monome $\{x^k y^l : (k, l) \in \mathbb{N}^2\}$ ist R-linear unabhängig.) In dieser Aufgabe geht es um die Erkundung der Entwicklung für $(x + y)^n$.

Ist char $R = d > 0$, dann ist $\binom{n}{k} \cdot 1_R = 0$ sobald d ein Teiler von $\binom{n}{k}$ ist. Der kleine Satz von Fermat führt zu dem Extremfall: $(x + y)^p = x^p + y^p$, wenn $d = p$ prim ist.

Finden Sie z. B. mit der Maple-Anweisung

$$\mathtt{for\ k\ to\ N\ do\ sort(expand((x+y)^n)\ mod\ d)\quad od;}$$

$$\text{(z. B. } N = 5,\ n = p^k + 1,\ d = p,\ p \text{ fest, oder: } N = 10,\ n = \text{fest},\ d = p,\ p \in \mathscr{P})$$

mindestens zwei weitere "schöne" Fälle. Stellen sie die entsprechende binomische Formel auf und beweisen Sie sie.