Algebra I
SoSe 2004 **14. Juli 2004**
Wiland Schmale **12:00 - 15:00 Uhr**

Klausur

(1) (a) (4 Punkte) Seien F, H Untergruppen der endlichen Gruppe G und gelte $F \subseteq H, <1> \neq F \neq H \neq G$. Warum enthält dann G mindestens 8 Elemente?
(b) (4 Punkte) Seien $K \subseteq L \subseteq M \subseteq N$ Körpererweiterungen und gelte $K \neq L \neq M \neq N$. Warum ist dann $\dim_K N \geq 8$?

(2) Betrachtet werde die Abbildung $\mu : \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9$ mit $\mu(r) = 7 \odot r$ für $r \in \mathbb{Z}_9$.
(a) (5 Punkte)
(i) Zeigen Sie: μ ist bijektiv.
(ii) $\mu(G(\mathbb{Z}_9)) \subseteq G(\mathbb{Z}_9)$
(iii) Bestimmen Sie $G(\mathbb{Z}_9)$ und ordnen Sie Ihr Ergebnis an in der Form $\{r_1, r_2, \ldots\}$ mit $r_1 < r_2 < \ldots$.
(b) (2 Punkte) Welche Permutation σ der Menge $\{r_1, r_2, \ldots\}$ aus Teil (a)(iii) bewirkt μ ?
(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Zyklendarstellung von σ.

(3) (a) (4 Punkte) Berechnen Sie $(x+1)^{k}$ in $\mathbb{Z}_2[x]_{3,x^3}$ für $k = 2, 3, 4$.
(b) (2 Punkte) Existiert $(x+1)^{-1}$ in $\mathbb{Z}_2[x]_{3,x^3}$?

(4) (4 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, gilt dann auch $\mathrm{ggT}(\varphi(a), \varphi(b)) = 1$? Begründung oder Gegenbeispiel. (φ bezeichnet die Eulersche φ-Funktion)

(5) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $x \equiv 3 \mod 14$ und $x \equiv 4 \mod 15$.

(6) Seien $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, $a \in L$ und $K^* = K \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:
(a) (2 Punkte) $K^* \cap a\, K^* \neq \varnothing \implies a \in K$
(b) (4 Punkte) $K^* \cap a^2\, K^* \neq \varnothing \implies [K[a] : K] \leq 2$

(7) Seien $f = x^3 + x^2$ und $g = x^3 + x$ Polynome in $K[x]$.
Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$ mit Hilfe der Primzerlegungen von f und g in $K[x]$ und zwar
(a) (3 Punkte) für $K = \mathbb{Q}$,
(b) (3 Punkte) für $K = \mathbb{Z}_2$.

(8) (5 Punkte) Bestimmen Sie $\mathrm{MiPo}_{\mathbb{Q}}(a)$ für $a = e^{\frac{2\pi i}{6}}$.

(9) (4 Punkte) Gibt es in $G(\mathbb{F}_9)$ ein Element mit $\mathsf{ord}(a) = 4$?

(10) (a) (4 Punkte) Konstruieren Sie einen Körper $\mathbb{F}_{25}$ mit 25 Elementen.
(b) (3 Punkte) Geben Sie einen surjektiven Ringmorphismus an von $\mathbb{Z}[x]$ auf ihren Körper $\mathbb{F}_{25}$.

(11) (6 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring und I ein Primideal, $I \neq R$.
Zeigen Sie: ${}^{R}/_{I}$ ist nullteilerfrei.

(12) (6 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.
Zeigen Sie: $I := \{a \in R : a^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Ideal in R.

(13) (5 Punkte) Zeigen Sie: $y^6 + xy^5 + 2xy^3 - x^3y + x^2 + x$ ist unzerlegbar in $\mathbb{Z}[x, y]$.

(14) (4 Punkte) Zeigen Sie für ein von 0 verschiedenes a aus einer Körpererweiterung L von K:
a^{-1} algebraisch über $K \implies a$ algebraisch über K.

Alle Aufgaben zusammen ergeben maximal 82 Punkte.
Die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben sollen maximal 70 (± 3) Punkte ermöglichen.
Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 28 Punkte erreicht werden.