Algebra I
SoSe 2004
Schmale

Aufgaben zum bisherigen Stoff und wie sie in der Klausur gestellt werden könnten.

Thema Gruppen:

- Sei e die Eulersche Zahl. Beschreiben Sie die von e^2 und e^3 in $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ erzeugte Untergruppe $< e^2, e^3 >$.
- Stellen Sie die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ in Zyklenschreibweise dar. Sie erhalten $\sigma = \zeta_1 \circ \zeta_2$ mit zwei von der Identität verschiedenen Zyklen ζ_1, ζ_2. Wie viele Elemente enthält die Untergruppe $< \zeta_1, \zeta_2 >$ in S_7?
- Zeigen Sie ausführlich für eine Gruppe G, eine Untergruppe U und Elemente g_1, g_2 von G :
$$g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \Rightarrow g_1H = g_2H$$
- Seien A, B zwei ähnliche Matrizen aus $GL(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:
  Die Untergruppe $< A >$ und $< B >$ von $GL(n, \mathbb{R})$ sind isomorph.
- Bestimmen Sie die Nebenklassen und den Index der Untergruppe $< 2 >$ in $(G(\mathbb{Z}_7), \odot, 1)$
- Sei G die Menge der Matrizen aus $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ mit genau zwei von 0 verschiedenen Einträgen. Weisen Sie nach, dass G eine Untergruppe ist mit 8 Elementen und bestimmen Sie den von $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ erzeugten Normalteiler K.
- Geben Sie ein möglichst kleines Erzeugendensystem für die Gruppe $G(\mathbb{Z}_8)$ an.
- Sei $M := FM(A, B)$, das freie von den "Buchstaben" A, B erzeugte Monoid und $\varphi : M \to \mathbb{N}_+$ der Monoidmorphismus mit $\varphi(A) = 2, \varphi(B) = 3$. Dabei ist mit $\mathbb{N}_+$ das multiplikative Monoid $(\mathbb{N}_+, \cdot, 1)$ gemeint.
  Geben Sie nichttriviale Worte V, W aus M an, für die gilt
$$\varphi(V) = \varphi(W) \text{ und } V \neq W.$$
  Geben Sie außerdem eine Teilmenge N von M an, für die gilt: $\varphi(N) = \text{Bild } \varphi$ und $\varphi |_N$ ist injektiv.
- Sei G eine Gruppe und H Normalteiler.
  Antworten Sie mit ja oder nein. Falsche Antworten entwerten Richtige.

☐ ja	☐ nein	H kommutativ $\Rightarrow G/_H$ kommutativ
☐ ja	☐ nein	$G/_H = \bigcup_{g \in G} gH$
☐ ja	☐ nein	Auch wenn G unendlich viele Elemente enthält, können $[G : H]$ oder $\lvert H \rvert$ endlich sein.
☐ ja	☐ nein	Für alle $g \in G$ und alle $h \in H$ sind ghg^{-1} und $gh^{-1}g^{-1}$ und $g^{-1}hg$ Elemente von H.

- Sei H Untergruppe des Zentrums der Gruppe G und sei $G/_H$ zyklisch. Zeigen Sie: Dann ist G kommutativ.

Thema Ringe

- Zeigen Sie ausführlich für ein Ideal I im Ring R und $a, b \in R$
  (a) $a + I = b + I \Leftrightarrow a \in b + I$
  (b) Wenn $aR = bR$, R kommutativ und a Nullteiler, dann ist auch b Nullteiler.
- Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $\varrho_{x^2} \circ \varrho_2 : \mathbb{Z}[x] \Rightarrow (\mathbb{Z}_2[x])_{2,x^2}$
- Zeigen Sie für einen kommutativen Ring R ein Ideal I in R :
  $$\left|R/_I\right| = 2 \Rightarrow I \text{ maximales Ideal}$$
- Bestimmen Sie alle linearen Polynome ohne Nullstellen in $\mathbb{Z}_4[x]$ und zeigen Sie, dass sie invertierbar sind in $\mathbb{Z}_4[x]$.
- Zerlegen Sie das Polynom $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ in Primfaktoren.
- $f = x^5$ ist ein Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ mit den Eigenschaften: $f(0) = 0$ und $f\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right) = 1$. Gibt es ein Polynom kleineren Grades in $\mathbb{Q}[x]$ mit den gleichen Eigenschaften?
  [Anleitung: Das Polynom $x^5 - 1$ ist zerlegbar.]
- Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes (bei uns Satz 7.3, manchmal wird auch Satz 7.4 dazugerechnet): $\mathbb{R}[x]_{2,x^2+1} \cong \mathbb{C}$.
- Für einen kommutativen Ring R und $a, b \in R$ gilt:
  $$aR + bR = R \Rightarrow aR \cap bR = abR$$
  [Anleitung: Was bedeutet $c \in aR \cap bR$? Multipliziere geeignete Bézout-Identität mit c aus $aR \cap bR$ um zu folgern: $ab \mid c$]
- Wie viele Primpolynome vom Grad 2 mit höchstem Koeffizienten 1 gibt es in $\mathbb{F}_9[x]$?
  Dabei ist $\mathbb{F}_9$ ein Körper mit 9 Elementen.
  [Anleitung: Zähle die möglichen Produkte linearer Polynome ab.]
- etc.

Die Liste kann leicht verlängert werden. In den wöchentlichen Übungsaufgaben wurde und wird Ähnliches verlangt. Teile dieser Aufgaben sind entsprechend "Klausur-fähig" und sie sind insbesondere für die noch folgenden Themen zum Durcharbeiten der Vorlesung und zur Klausurvorbereitung empfohlen.

Ein paar Aufgaben aus der Klausur 2003 (Glüsing-Lüerßen) z. T. leicht abgewandelt:

- Konstruieren Sie einen Körper K mit 8 Elementen, geben Sie alle Elemente an und berechnen Sie das Produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$ für 4 verschiedene von Ihnen gewählte Elemente aus $K \backslash \{0, 1\}$.
- Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 3 \mod 5$ und $x \equiv 4 \mod 11$.
- Berechnen Sie $(\varrho_f(x^2 + 2))^{-1}$ in $\mathbb{Q}[x]_{2,f}$ mit $f = x^2 + x + 1$.
- Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome unzerlegbar sind:
  $f = x^7 - 8x^4 + 2x^2 - 4x + 2$ in $\mathbb{Q}[x]$
  $g = 2y^2x^4 + y^3x^3 + 5yx^2 + x^3 + 2$ in $\mathbb{Q}[x, y]$
  $h = 5x^3 + 8x^2 - 3x + 4$ in $\mathbb{Q}[x]$