

Wiederholungsklausur

- (1) Sei G eine Gruppe und H ein Normalteiler in G .
- (a) (3 Punkte) Geben Sie ein Beispiel mit Begründung an, bei dem G sechs Elemente und H zwei Elemente enthält.
- (b) (3 Punkte) Geben Sie ein Beispiel mit Begründung an, bei dem G und H unendlich viele Elemente enthalten und G/H acht Elemente enthält.
- (c) (3 Punkte) Geben Sie ein Beispiel mit Begründung an, bei dem G und H und G/H unendlich viele Elemente enthalten.

Zumindest bei (b) und (c) lohnt es sich nach geeigneten Untergruppen von Ringen zu suchen.

- (2) Sei S_8 die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, \dots, 8\}$ und $\sigma = (12)(34)(56)(78)(1357)$.
- (a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Zyklendarstellung von σ .
(Gemeint ist die Darstellung von σ als Produkt disjunkter Zyklen!)
- (b) (2 Punkte) Was können Sie ohne zu rechnen über die Ordnung von σ sagen ?

- (3) (4 Punkte) Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ ist nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}_4, +)$.

- (4) (5 Punkte) Ist die Abbildung $\Phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_7$ mit $\Phi(z) = (\varrho_6(z), \varrho_7(z))$ surjektiv ?

- (5) (5 Punkte) Bestimmen Sie $G(\mathbb{Z}_2[x]_{3, x^3+1})$.

- (6) Sei $f = x^4 + x$ aufgefasst als Polynom in $\mathbb{Z}_2[x]$.

(a) (2 Punkte) Weisen Sie nach, dass f quadratfrei ist.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die gleichgradige Zerlegung von f .

- (7) Aus einem der Minitests zur Einführung in die Algebra an der technischen Hochschule Darmstadt:

(je richtige Antwort ein Punkt, je falsche Antwort -1 Punkt, Minimum 0, Maximum 6 Punkte)

Ist das Polynom $x^2 + x + 1$ unzerlegbar in

ja nein $\mathbb{C}[x]$?

ja nein $\mathbb{R}[x]$?

ja nein $\mathbb{Q}[x]$?

ja nein $\mathbb{Z}[x]$?

ja nein $\mathbb{Z}_3[x]$?

ja nein $\mathbb{Z}_5[x]$?

- (8) (6 Punkte) Sei K eine Körpererweiterung von \mathbb{Z}_2 , die insgesamt aus 4 Elementen besteht und sei $\alpha \in K$. Welche Polynome aus $\mathbb{Z}_2[x]$ kommen als Minimalpolynome für α in Frage ?
- (9) (3 Punkte) Sei K ein Körper und $f \in K[x] \setminus K$ ein Polynom vom Grad n .
Warum ist $(x - a)$ ein Teiler des Polynoms $f - f(a)$?

Alle Aufgaben zusammen ergeben maximal 50 Punkte.

Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht werden.