Algebra 2
WiSe 2004/2005
Schmale

# Inhaltsverzeichnis


## Teil A: Algebraische Gleichungen in einer Variablen

**§ 1 $n = 2, 3, 4$**
u. A. Herleitung der klassischen Formeln von Cardano und Ferrari, Problem der eindeutigen Schreibweise von Wurzelausdrücken.

**§ 2 Ausblick, Literatur, Film über Galois, Wiederholungen**

**§ 3 Die Verbände $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{U}$**

**§ 4 Galoiskorrespondenz**

**§ 5 Hauptsatz der Galoistheorie**

**§ 6 Auflösen von Gleichungen durch iteriertes Wurzelziehen**

**§ 7 Symmetrische Polynome und der Satz von Abel-Ruffini**

**§ 8 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal**
(sogenanntes Handout)

## Teil B: Algebraische Gleichungen in mehreren Variablen

**§ 0 Vorbemerkungen, Motivation, Inhalt**

**§ 1 Definition und wichtigste Eigenschaften von Monomordnungen**
Motivation, Newtonpolytope, $C_\alpha^+$-Mengen, Noethersche Teilmengensysteme, Wohlordnung; Monomordnungen, "$\geq 0$"-Kriterium, Darstellung von Monomordnungen durch Matrizen, Satz von Robbiano (Beweisskizze).

**§ 2 Ordnungsabhängige Definition und Begriffe**

**§ 3 Divisionsalgorithmus**

**§ 4 Monomideale und Dicksonsches Lemma**

**§ 5 Hilbertscher Basissatz und Gröbnerbasen**
Zugang über Dickson-Lemma und Divisionsalgorithmus, Anfangsideal, Definition Gröbnerbasis, universelle Gröbnerbasen, $\mathcal{V}_L(P)$, minimale und reduzierte Gröbnerbasen, Eindeutigkeit, reduzierte Gröbnerbasen.

**§ 6 Weitere Eigenschaften von Gröbnerbasen**
Unabhängigkeit des Restes vom speziellen Divisionsalgorithmus, Standard-/Basismonome, kanonische Darstellung von $R/I$ als Restring $R_{I,\leq}$, $S$-Polynome, Buchbergerkriterium, Verbesserungen.

**§ 7 Buchbergeralgorithmus**
Korrektheitsbeweis, Ausblick auf moderne Varianten.

**§ 8 Elimination und Dimension**
Eliminierordnungen und deren Auswirkungen auf Gröbnerbasen und Anfangsideale, algebraische Gleichungssysteme in verallgemeinerter Dreiecksform, Dimension eines Ideals, Hilbertscher Nullstellensatz (Beweisskizze) und Eigenschaften 0-dimensionaler Ideale, Zusammenhang zwischen Anzahl der Lösungen und Anzahl der Standardmonome, radikale Ideale insbesondere 0-dimensionale, mehrdimensionale Interpolation.

**§ 9 Bemerkungen und Texte zur Problematik des Lösens algebraischer Gleichungssysteme**
u.A. ein Text aus David Cox/John Little/Donald O'Shea: "Using algebraic geometry" und ein Text von Daniel Lazard.

**§ 10 Zur Berechnung von $\mathcal{B}_{I,\leq}, I \cap K[x_k], \sqrt{I}$, Basiskonversion und Shape-Lemma für 0- dimensionale Ideale**

**§ 11 Eigenwert- und Eigenvektormethoden zur Lösung algebraischer Gleichungssysteme mit endlich vielen Lösungen**

**§ 12 Eingrenzung reeller Lösungen**

**§ 13 $\mu$-Auflösungen und univariate Darstellungen für 0-dimendionale Ideale**

**§ 14 Vielfachheiten von 0-Stellen und ein Satz von Stickelberger**