**Algebra 2:**
**WiSe 2004/2005, Schmale** **24. 11. 2004**

**Weitere Literaturhinweise und Kommentare zu Teil A der Vorlesung**

Zur Umkehrung des Kriteriums „$f$ auflösbar $\Rightarrow$ $G_f$ auflösbar“ im Fall $\mathrm{Char}(K) = 0$ empfehle ich Jacobson's Basic Algebra, Seiten 247/248, aber natürlich auch van der Waerden und viele andere. Jacobson verwendet die gleiche Definition von „auflösbar“. Es werden dabei noch mehr Ergebnisse aus der Gruppentheorie herangezogen (Seiten 241/242). Das vollständige Kriterium in beiden Richtungen heißt *Galois-Kriterium*. Die Umkehrung auch im Falle von 0 verschiedener Characteristik wird z.B. bei Lang (s.o, Auflage 1984: Seiten 326-328) behandelt. Die Definition der Auflösbarkeit muss dann modifiziert werden, um die sogenannten Artin-Schreier-Polynome „$x^p - x - c$“ bei von 0 verschiedener Charakteristik $p$ zuzulassen.

Viel Material ist wie immer zu finden bei:
◇ Günter, Scheja und Uwe Storch: *Lehrbuch der Algebra : unter Einschluß der linearen Algebra, Band 2*, Teubner, 1988, insbesondere auf den Seiten 770 ff.

Vielleicht nicht so reichhaltig, aber m.E. von der Präsentation und Orientierung her vorteilhafter ist das schon im ersten Teil der Literaturbemerkungen erwähnte Werk von Karl-Heinz Spindler, insbesondere Band 2, Kapitel 20 bis 27.

Mehr zu speziellen Gleichungen gibt es z.B. in Werken von Bewersdorf, Tignol, Scheja/Storch.

Mehr und Interessantes zu nicht auflösbaren Gleichungen ist in dem eigenwilligen Büchlein von Charles Hadlock ausgearbeitet. Dort wird u.A. ausführlich der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz bewiesen und benutzt, um für alle $n \geq 5$ nicht auflösbare Polynome zu konstruieren.

In dem Lehrbuch von Lisl Gaal werden viele Beispiele einbezogen. Eine Besonderheit im Vergleich mit manchen anderen Abhandlungen der Galoistheorie ist, dass auch gezeigt wird, wie zumindest prinzipiell die wichtigsten Objekte der Galoistheorie berechnet werden können (s.u.). Außerdem wird z.B. der Körper $\mathbb{W}$ aller Wurzeln aus ganzen Zahlen über $\mathbb{Q}$, untersucht und verglichen mit dem Körper $\mathbb{E}$, der alle Einheitswurzeln über $\mathbb{Q}$ enthält. Es gilt erstaunlicherweise $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{E}$. Auch der Körper der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen wird dort verglichen mit $\mathbb{E}$ (Seite 241).

In dem Buch von Maureen Fenrick wird am Ende die Galoistheorie benutzt, um wichtige Resultate der Mathematik zu gewinnen: ein Satz von Wedderburn, der besagt, dass jeder endliche Schiefkörper ein Körper ist, Existenz von Galois-Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ zu gegebenen abelschen Galoisgruppen.
Zur Realisierung endlicher abelscher Gruppen als Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$ kann auch auf das Buch von Kunz (s.o. S. 182) verwiesen werden.

Vieles haben wir nicht behandelt: allgemeine Diskriminanten, Normalbasen, Hilbert's Satz 90 (siehe z.B. das oben erwähnte Skript von Milne), unendliche Galoiserweiterungen, etc.

Die Galoistheorie ist auch heute noch ein Gebiet aktiver mathematischer Forschung. Insbesondere sind beim sogenannten inversen Problem der Galoistheorie noch viele Fragen offen. Dabei geht es darum zu gegebenem Körper $K$ (insbesondere im Fall $K = \mathbb{Q}$) und gegebener Gruppe $G$ eine Galoiserweiterung zu finden mit $G$ als Galoisgruppe. (z.B. Ihara e.a. Galoisgroups over $\mathbb{Q}$, Arbeiten von Gunter Malle, um nur Beispiele zu nennen. Dies ist Spezialliteratur, die auch für Mathematiker anderer Spezialgebiete nicht mehr so leicht zugänglich ist.) Lesenswert, auch wenn man nicht weiterlesen will, ist die Einleitung zu
◇ Heinrich Matzat: *Konstruktive Galoistheorie*, Springer Lecture Notes Nr. 1284, 1987.

Grundsätzliches zur Berechnung von Galoisgruppen findet man bereits in dem Lehrbuch von van der Waerden, außerdem z.B. in dem schönen kleinen Büchlein
◇ D.J.H. Garling: *A Course in Galoistheory*, Cambridge University Press, 1986
Dort findet man auch einen gut lesbaren Abschnitt über transzendente Körpererweiterungen und Transzendenzbasen, wie sie bei unserem Zugang zum Satz von Abel und Ruffini auftraten.

Im Zusammenhang mit modularen Methoden in der berechnenden Algebra sind außerdem Ergebnisse über den Zusammenhang der Galoisgruppe eines Polynoms aus z.B. $\mathbb{Z}[x]$ mit denen der entsprechenden reduzierten Polynome aus $\mathbb{Z}_p[x]$ von Interesse.

Ein Standardwerk der „computational algebra“ ist
◇ Henri Cohen: *A Course in Computational Number Theory*, Springer, zur Zeit wieder vergriffen, Neuauflage noch in 2003.

Ein aktuelles Forschungsgebiet stellt auch die Galoistheorie von Differentialgleichungen dar. Einführende Literatur dazu:
◇ Magid, Andy R. Magid: *Lectures on differential Galois theory*, Providence (RI) American Mathematical Society, 1994.
◇ Marius van der Put; Michael F. Singer: *Galois theory of linear differential equations*, Springer 2003.