Algebra 2 18. Oktober 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 1

(1) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + 2\sqrt{5}\, x - 12\, i$$

innerhalb $\mathbb{C}$. Letzteres heißt, dass geeignete reelle Zahlen a, b zu bestimmen sind derart, dass jeweils $a+ib$ Lösung ist. Sie sollten dazu nicht einfach solve(...) bei entsprechender Software eingeben, sondern z.B. die Ihnen bekannte Lösungsformel benutzen und die auftretende komplexe Wurzel geometrisch-analytisch in der Zahlenebene ermitteln. Das Ergebnis hat ganzzahlige „Parameter“.

(2) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ und etwa $\sqrt{a + b\, i} = u + v\, i$ in $\mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass

$$\big[\mathbb{Q}[u, v] : \mathbb{Q}\big] \leq 4$$

und untersuchen Sie das Beispiel „$a = 1 = b$“ genauer. Gilt im Beispiel Gleichheit ?
Je nachdem, wie Sie vorgehen, hilft Ihnen u.U. die Betrachtung des größeren Körpers

$$\mathbb{Q}[i, u + v\, i, u - v\, i]\,.$$

(3) (a) Wenden Sie die Cardano-Formel der Vorlesung an auf die Gleichung

$$x^3 + 6x - 20 = 0$$

und bedenken Sie, dass die zugehörige Funktion streng monoton wächst und die Nullstelle 2 hat ??? Bestimmen Sie auch die weiteren Lösungen.
(b) Interpretieren Sie das Ergebnis der Cardano-Formel für die Gleichung

$$x^3 - 15x - 4 = 0,$$

die ebenfalls eine ganzzahlige Nullstelle besitzt.

(4) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ferrari'schen Methode innerhalb $\mathbb{C}$ die Lösungen der folgenden Gleichungen:
(a) $x^4 + x^2 + 2x + 6$
(b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x - 5$