Algebra 2 3. Januar 2005
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 10

(37) Betrachtet werde die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$. Sei $V := \mathsf{Bild}\,\varphi$

(a) Zeigen Sie: Es gibt ein Ideal $I \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ derart, dass $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I) = \mathsf{Bild}\,\varphi$.

(b) Geben Sie 4 paarweise verschiedene Ideale $I_1, \ldots, I_4$ in $\mathbb{Q}[x, y, z]$ an derart, dass für $1 \leq k \leq 4$ mit $V_k = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I_k)$ gilt

$$V = V_1 \cap V_2 = V_3 \cap V_4.$$

(38) Bestimmen Sie ein Ideal I in $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ derart, dass

$$\mathcal{V}(I) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}.$$

Berechnen Sie eine gradlex-Gröbnerbasis.
Ist $1 + 2x_1 - x_2$ eine Einheit* in R/I bzw. $R_{I,\leq}$?

(39) Seien L eine endlichdimensionale Körpererweiterung von K (schwächere Voraussetzung möglich) und zur Abkürzung $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $S = L[x_1, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie: Mit $f, f_1, \ldots, f_s \in R$ und $F = [f_1, \ldots, f_s]$ gilt:

(a) $f \in \langle F \rangle_S \Rightarrow f \in \langle F \rangle_R$

(b) F Gröbnerbasis von $\langle F \rangle_R \Rightarrow F$ Gröbnerbasis von $\langle F \rangle_S$.

(40) Seien $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $f_1, \ldots, f_{r+1}$ lineare homogene (d. h. hier: ohne konstanten Term) Polynome aus R, $V = \{v \in K^n : f_1(v) = \cdots = f_r(v) = 0\}$,
$W = \{v \in K^n : f_1(v) = \cdots = f_{r+1}(v) = 0\}$, $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle_R$ und $J = \langle f_1, \ldots, f_{r+1} \rangle_R$.
Ist die Aussage $V = W \Leftrightarrow I = J$ wahr?

.....

*Für eine systematischere Bestimmung von multiplikativen Inversen im Restring $R_{I,\leq}$ sei Auf [AL] p.59 verwiesen