Algebra 2 10. Januar 2005
WiSe 2004/2005
Schmale

# Aufgabenblatt 11

(41) siehe Maple-Arbeitsblatt Aufgabe_ 41.mws

(42) Sei $f = y^2xz - x^2yz^2 - x^2yz + xyz + x + y + z - 1$ ein Polynom aus $\mathbb{Q}[x, y, z]$. Bestimmen Sie die **genaue Anzahl der rellen Singulärstellen** (Totalableitung=0) des durch $f$ induzierten Funktionals $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Die Benutzung z.B. von Maple wird empfohlen.

(43) **Berechnung der Erzeuger von $I \cap K[x_k]$ ohne Elimination.**

(a) Seien $I$ ein Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n], k \in \{1, \ldots, n\}$ und $I \cap K[x_k] = f \cdot K[x_k]$ mit einem normierten nicht konstanten Polynom $f$. Sei etwa $f = x^d + \widetilde{f}, d = \mathsf{deg}\, f$. Weiter sei $G$ eine reduzierte Gröbnerbasis bezüglich einer Monomordnung $\leq$ . Zeigen Sie:
(i) $x^\alpha \in \mathfrak{J}_{I,\leq} \Leftrightarrow \overline{x^\alpha}^{\,G} = x^\alpha$
(ii) $\overline{x^d}^{\,G} = -\widetilde{f}$

(b) Entwickeln Sie ein Verfahren, zur Berechnung von $f$, das ohne Elimination auskommt und nur die gegebene Gröbnerbasis $G$ benutzt. Laut [CLS2] S. 39 wird ein solches Verfahren von Maple benutzt.

(44) **Berechnung des Durchschnitts von Idealen.**
Seien $I_1, I_2$ Ideale in $R = K[x_1, \ldots, x_n]$. Im größ eren Polynomring S:=$K[x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2]$ werde folgendes Ideal betrachtet

$$J := \langle 1 - y_1 - y_2, y_1I_1, y_2I_2 \rangle_S := \langle \{1 - y_1 - y_2\} \cup y_1I_1 \cup y_2I_2 \rangle_S$$

(a) Zeigen Sie: $J \cap R = I_1 \cap I_2$.
Anleitung: setze u.A. $(y_1, y_2) = (1, 0)$ und $= (0, 1)$.

(b) Beschreiben Sie eine Methode zur Berechnung von $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ für drei (oder auch mehr) Ideale.
Anleitung: geeignete Eliminationsordnung.

(c) Berechnen Sie $\langle x, y \rangle \cap \langle x - y, y \rangle \cap \langle x - 2, y - 1 \rangle$ in $\mathbb{Q}[x, y]$.