Algebra 2 17. Januar 2005
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 12

(45) Sei K ein perfekter Körper und $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus K$. Zeigen Sie:

$$f \text{ quadratfrei} \iff \mathsf{ggT}\,(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) = 1$$

(46) Ist die Ausgabebasis beim FGLM-Algorithmus automatisch reduziert?

(47) **Darstellung von $R_{I,\leq}$ als Matrixalgebra:**
Seien I ein Ideal in $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $\leq$ eine Monomordnung, $A = R_{I,\leq}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{I,\leq}$ die Standardmonombasis von A bezüglich $\leq$ und $m = |\mathcal{B}|$. Sei $\lambda_a : A \to A$ die K-lineare Abbildung mit $\lambda_a(b) = ab$ für $b \in A$. Die Matrixdarstellung von λ_a bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ werde mit M_a bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung $M : A \to K^{m \times m}$, $a \mapsto Ma$ ist ein injektiver K-Algebrenmorphismus. M ist eine sogenannte reguläre Darstellung von A.

(b) Beispiel 1: **Zirkulanten.** Seien $n = 1, m \geq 2, x = x_1, I = \langle x^m - 1 \rangle_{K[x]}$. Beschreiben Sie $M(A)$.

(c) Beispiel 2: Seien $n = 2, x = x_1, y = x_2, I = \langle x^2 + 2x + 1, y^3 \rangle_{K[x,y]}$. Bestimmen Sie M_{x+y} und ggf. auf diesem Wege $(x + y)^{-1}$ in A. (Spielt die Monomordnung hier eine Rolle ?)

(d) Beispiel 3: Seien $f_1 = x_1x_3 - 1, f_2 = x_1x_2^2 + x_2x_3 + 1, f_3 = x_2^2 - x_1x_3$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom φ von M_{x_1} bezüglich der gradlex-Ordnung mit $x_1 > x_2 > x_3$ und zeigen Sie, dass A isomorph ist zu $K[t]/\varphi K[t]$. Was ergibt sich als M_{x_1} bezüglich der lex-Ordnung mit $x_1 > x_2 > x_3$?

(48) Zeigen Sie:

(a) Eine quadratische Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr Minimalpolynom quadratfrei ist.

(b) Sei I ein 0-dimensionales Ideal in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, dann gilt:

$$\sqrt{I} = I \iff M_{x_k} \text{ ist diagonalisierbar für } 1 \leq k \leq n$$