Algebra 2 24. Januar 2005
WiSe 2004/2005
Schmale

# Aufgabenblatt 13

(49) siehe Maple-Arbeitsblatt Aufgabe_ 49.mws

(50) Zeigen Sie mit den Bezeichnungen von § 11:
Wenn $x_1 > \cdots > x_n$, $g = x_k + \widetilde{g} \in I$ und $x_k = LM(g)$, dann ist unabhängig von der Monomordnung $\widetilde{g}$ aus $K[x_{k+1}, \ldots, x_n]$.

(51) Seien $I$ ein 0-dimensionales Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n](= R)$, sei $f \in R$ ein auf $\mathfrak{V}(I)$ injektives Polynom und $d = |\mathfrak{V}(I)|$. Zeigen Sie.

$$1, f, \ldots, f^{d-1} \text{ sind } K\text{-linear unabhängig modulo } I.$$

(52) Seien $f_1 = x^2 - 2xz + 5$, $f_2 = xy^2 + yz + 1$, $f_3 = 3y^2 - 8xz$ Polynome aus $\mathbb{Q}[x, y, z]$ und
$I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie die Matrizen $MS_h$ und die Signaturen der Bilinearformen $S_h$ für $h = 1, f, f^2$ und $f \in \{x(x-1),\ y(y-1),\ z(z-1)\}$ bezogen auf $I$ und die gradlex-Ordnung.

(b) Versuchen Sie mit Hilfe Ihrer Ergebnisse und denen aus §12 im Teil B der Vorlesung möglichst viel Informationen über die Lage der reellen Nullstellen des Ideals $I$ zu gewinnen.

Diese Aufgabe ist mit Handrechnung schwer zu bewältigen.