Algebra 2 31. Januar 2005
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 14

(53) Seien $f = xy^2 - z^2$ und V die Menge der rellen Nullstellen von f. V ist der sogenannte Whitneysche Regenschirm. Bestimmen Sie den minimalen Abstand des Punktes $(2, 2, 0)$ von V im $\mathbb{R}^3$. Bevor Sie die Aufgabe lösen können, empfiehlt es sich, Analysiskenntnisse zu aktivieren über lokale Extrema mit Nebenbedingungen und Lagrange-Multiplikatoren, etwa an Hand von H. Heuser: Analysis 2. (Nach einer Aufgabe von van Straten e.a. zur Computeralgebra in Mainz, 2001)

(54) (a) Zeigen Sie für ein 0-dimensionales Ideal I aus $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $K \subseteq \mathbb{C}$ und für ein $f \in R$.

$$f \in \sqrt{I} \Leftrightarrow \forall g \in R : S(f, g) = 0$$

Anleitung: "$\Rightarrow$" Satz von Stickelberger, "$\Leftarrow$" Satz von Stickelberger Teil (c) für $h = f, fg, fg^2, \ldots$ mit einem auf $\mathcal{V}(I)$ injektiven Polynom g, umschreiben als Matrixgleichung, Nullstellensatz.

(b) Das Ergebnis aus (a) eröffnet einen weiteren Weg zur Berechnung von $\sqrt{I}$. Skizzieren Sie ein entsprechendes Verfahren.

(55) (a) Seien $A \in K^{n\times n}$, $b \in K^{n\times 1}$ und $\varphi : K^{n\times n} \to K^{n\times n}$ die affin-lineare Transformation mit $\varphi(v) = Av + b$. Seien außerdem I ein Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$, $V := \mathcal{V}(I)$ und $W := \varphi(V)$. Sind dann V, W im Sinne der Definition 1 in § 13 K-isomorph?

(b) Seien nun I und J 0-dimensionale Radikalideale in $K[x_1, \ldots, x_n]$ in regulärer Position bezüglich x_n, $W = \mathcal{V}(J)$ und gelte $|V| = |W|$. Gilt dann automatisch $I \cong_\mu J$? (Bei Bedarf $K \subseteq \mathbb{C}$.)

(56) Mit $a, b \in K^n, a \neq 0$ sei $\Gamma = \{b + \lambda a : \ \lambda \in K\}$.

(a) Bestimmen Sie $J = \mathcal{J}(\Gamma)$ in $R = K[x_1, \ldots, x_n]$.

(b) Sei I ein weiteres Ideal in R und es gelte $\Gamma \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ und $\Gamma \nsubseteq \mathcal{V}(I)$. Zeigen Sie: $\dim\ (I + J) = 0$

(c) Bestätigen Sie an einem Beispiel mit $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $\sqrt{I} = I$, $\Gamma \nsubseteq \mathcal{V}(I)$ dass Γ eine Tangente an $\mathcal{V}(I)$ ist, wenn $\sqrt{I + J} \neq I + J$.

Die Teile (a) und (b) der Aufgabe vereinfachen sich beträchtlich, wenn Sie zuerst zeigen, dass ohne Einschränkung $b = 0$ und $a = (0, \ldots, 1) = e^{(n)}$ angenommen werden kann.