Algebra 2 25. Oktober 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 2

(5) Sei $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ die natürliche n-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie $\big[\mathbb{Q}[\zeta_n] : \mathbb{Q}\big]$ für $n = 2, 3, 4, 12$.

(6) Sei $L = \mathbb{Q}[a]$ mit $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f =$MiPo(a) von a über $\mathbb{Q}$.
- (b) Bestimmen Sie die Primzerlegung von f in $L[x]$.
- (c) Geben Sie möglichst viele Körper Z an zwischen $\mathbb{Q}$ und L.
- (d) Bestimmen Sie die Minimalpolynome $f =$MiPo$_Z(a)$ über den von Ihnen in (c) angegeben Zwischenkörpern Z.

(7) Zum Teil als Wiederholung: **Elementeordnungen.**
Seien M ein Monoid und $a, b \in G(M)$ Elemente endlicher Ordnung, für die gilt: $ab = ba$. Seien m, n die Ordnungen von a und b und T die Menge der positiven Teiler von m.
Zeigen Sie:
- (a) $\forall r \in \mathbb{Z} : \mathrm{ord}(a^r) \in T$
- (b) $\forall d \in T : \mathrm{ord}(a^d) = \frac{m}{d}$
- (c) $\forall d \in T \;\; \forall r \in \mathbb{Z} : \mathrm{ord}(a^r) = d \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{Z} : r = s\frac{m}{d}$ und $ggT(s, d) = 1$.
  Anleitung: $r = s\frac{m}{d} + t$ mit $0 \leq td < m$. Es geht auch anders.
- (d) $\forall d \in T : \;\; |\{r \in \mathbb{Z}_m : \mathrm{ord}(a^r) = d\}| = |G(\mathbb{Z}_d)|$
- (e) Wenn ggT$(m, n) = 1$, dann ist $\mathrm{ord}(ab) = mn$.
- (f) Es gibt ein $c \in < a, b >$ derart, dass $\mathrm{ord}(c) =$kgV(m, n)

(8) Sei K ein Körper und $E_{K,n} = \{a \in K : \;\; a^n = 1\}$. K enthalte eine m-te primitive Einheitswurzel ξ und eine n-te primitive Einheitswurzel ζ. Betrachtet werde die Abbildung $\pi : \; E_{K,m} \times E_{K,n} \longrightarrow \; K$ definiert durch $\pi(a, b) = ab$ für $(a, b) \in E_{K,m} \times E_{K,n}$.
- (a) π ist ein Gruppenmorphismus und Bild $\pi \subseteq E_{K,mn}$.

Sei nun außerdem noch ggT$(m, n) = 1$.
- (b) $\mathrm{ord}(\xi\zeta) = mn$ und $E_{K,mn}$ enthält primitive m-te und n-te Einheitswurzeln.
- (c) Bild $\pi = E_{K,mn}$ und π ist injektiv, also insgesamt $E_{K,m} \times E_{K,n} \cong E_{K,mn}$.
- (d) Bestimmen Sie $E_{\mathbb{C},mn}$ explizit (vgl. Aufgabe (1)) und $\big[\mathbb{Q}[E_{\mathbb{C},mn}] : \mathbb{Q}\big]$ für $m = 2, n = 3$.
- (e) Zeigen Sie außerdem in der Situation von (a),(b) und für $m \geq 2$:

$$\sum_{a \in E_{K,m}} a = 0.$$

Anleitung zu (e): $x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + \cdots + x + 1)$