Algebra 2 1. November 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 3

(9) Sei β eine Quadratwurzel von $1+i$ in $\mathbb{C}$ und sei $L = \mathbb{Q}[\beta]$.
   (a) Bestimmen Sie alle Automorphismen von L über $\mathbb{Q}$.
   (b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathsf{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$.

(10) (a) Sei $\alpha = \sqrt[4]{3}$. Betrachtet werde die Erweiterung $L = \mathbb{Q}[\alpha, \zeta]$ mit $\zeta = i$ oder (etwas mehr Aufwand) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. Bestimmen Sie: $\mathsf{Aut}_{\mathbb{Q}[\zeta]}(L)$ und $\mathcal{Z}_{\mathbb{Q}[\zeta]}(L)$.
   (b) Gibt es eine Erweiterung L von $\mathbb{Q}$ derart, dass $\big[L : \mathbb{Q}\big] = 4$ und dass es außerdem einen Automorphismus der Ordnung 4 gibt ?
   Die Antwort ist mir gerade nicht geläufig. Vielleicht finden Sie sie ?

(11) Seien $\alpha = 2 + \frac{10}{9}\sqrt{3}$, $\overline{\alpha} = 2 - \frac{10}{9}\sqrt{3}$ und $\beta = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\overline{\alpha}}$.
   (a) Berechnen Sie $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$.
   (b) Beschreiben Sie den kleinsten Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$ innerhalb $\mathbb{C}$, der $\sqrt[3]{\alpha}$ enthält.
   (c) Bestimmen Sie $G = \mathsf{Aut}_{\mathbb{Q}}(L), \mathsf{Fix}_G(L)$ und $\sigma(\alpha), \sigma\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)$ für $\sigma \in G$.

(12) **Eine Korrespondenz zweier Verbände aus der linearen Algebra.**
Sei K ein Körper, $\mathsf{Char}(K) \neq 2$, $n \in \mathbb{N}_+, \mathcal{V} := \{V : V$ Untervektorraum von $K^n\}$, $G = GL(n; K)$ und $\mathcal{U} = \{U : U$ Untergruppe von $G\}$. Zu $V \in \mathcal{V}$ sei $V' := \mathsf{Aut}_V(K^n) := \{P \in G : Pv = v$ für alle $v \in V\}$ und zu $U \in \mathcal{U}$ sei $U' := \mathsf{Fix}_U(K^n) := \{v \in K^n : Pv = v$ für alle $P \in U\}$.
Zeigen Sie
   (a) $V' \in \mathcal{U}$ und $U' \in \mathcal{V}$.
   (b) $V' = V''', U' = U'''$
   (c) $V = V''$, aber i.A. nicht $U = U''$
   (d) $U' = \{0\}$, wenn U ein Normalteiler $\neq < 1 >$ in G ist.

Anders als in der Galois-Theorie, passen hier die Verbände $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ nicht so gut zusammen. Genauere Informationen über die Struktur von G können z.B. im Kapitel 6 der Basic Algebra von Nathan Jacobson gfunden werden.