Algebra 2 15. November 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 5

(16) **Die reduzierte Gleichung vom Grad 3**
Sei K ein Körper, dessen Charakteristik nicht 2 oder 3 ist. Sei $\boldsymbol{f = x^3 + px + q} \in K[x]$. L ein Zerfällungskörper von f über K und $G = \mathrm{Aut}_K(L)$. Zeigen Sie:
(a) Ist f unzerlegbar, so hat f paarweise verschiedene Nullstellen in L.
(b) $[L : K] \in \{1, 2, 3, 6\}$ und alle Werte kommen vor, wenn man K und f geeignet wählt.
(c) Wenn $[L : K] = 6$, dann ist $G \cong S_3$.
(d) Ist f unzerlegbar und sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Nullstellen von f, ist außerdem

$$\delta := (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)$$

und $\Delta := \delta^2$, die sogenannte **Diskriminante** von f über K, dann gilt: $\boldsymbol{\Delta = -4p^3 - 27q^2}$. Insbesondere ist $\Delta \in K$.
[Bemerkung: Dies ist z. B. mit "Maple" leicht nachzurechnen oder man studiert etwa bei Jacobson: Basic Algebra I p. 249 ff. Beachte: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.]
(e) Ist $\delta \in K$, so sind ungerade Permutationen von $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ durch die Automorphismen von G nicht zu bewerkstelligen.
(f) Ist f unzerlegbar, dann gilt: $[L : K] = 3 \Leftrightarrow \delta \in K$ bzw: $[L : K] = 6 \Leftrightarrow \delta \notin K$.
(g) Bestimme $[L : K]$ und G für das Polynom $g = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ und $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Z}_5$ und $K =$ Körper mit 25 Elementen.
(h) Gibt es einen Zerfällungskörper vom Grad 3 über $\mathbb{Q}$?

(17) Sei $f = x^3 - 6x + 2$ in $\mathbb{Q}[x]$.
(a) Weisen Sie nach, dass f drei verschiedene reelle Nullstellen hat.
(b) Stellen Sie die Lösungen durch iterierte Wurzeln dar.

(18) Sei $f = x^3 + px + q$ unzerlegbar in $\mathbb{Q}[x]$ und seien alle drei Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ reell. Weiter seien $L = \mathbb{Q}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $G = \mathsf{Aut}_{\mathbb{Q}[\delta]}(L)$, $N = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ und δ wie in Aufgabe (16). Zeigen Sie:
(a) $\big[L : \mathbb{Q}[\delta]\big] = 3$ und G bewirkt auf N genau die geraden Permutationen. Außerdem ist $L = \mathbb{Q}[\delta, \alpha_1]$.
Seien nun M ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, $m \in M$, $m > 0$, p eine Primzahl, $w = \sqrt[p]{m}$ (positive relle p-te Wurzel) und $w \notin M$. Nach Beobachtung 6 in A§6 ist dann $\big[M[w] : M\big] = p$.
(b) Seien $\alpha_1 \notin M$ und $\delta \in M$. Wenn $\alpha_1 \in M[w]$, dann ist $M[w] = M[\alpha_1]$ und $M[\alpha_1]$ ist ein Zerfällungskörper über M und deswegen kann α_1 gar nicht in $M[w]$ liegen.
(c) Keine der Nullstellen von f kann durch reelle iterierte Wurzeln über $\mathbb{Q}$ dargestellt werden.
(d) Als Beispiele können die Polynome $x^3 - 3x + 1$ und $x^3 - 2x + 1$ dienen.

(19) Seien L eine Körpererweiterung von K und $\alpha \in L$. Seien weiter $G = Aut_K(L)$ und $B(\alpha) := \{\beta \in L : \exists\, \sigma \in G : \sigma(\alpha) = \beta\}$. $B(\alpha)$ heißt die Bahn (orbit) von α unter G. Zeigen Sie:
(a) α algebraisch über $K \Rightarrow |B(\alpha)| < \infty$ (gilt auch die Umkehrung??)
(b) $|B(\alpha)| \leq [L : K]$, wenn $[L : K]$ endlich.
(c) Wenn α algebraisch ist über K, dann ist

$$f := \prod_{\beta \in B(\alpha)} (x - \alpha) \in \overline{K}[x] \text{ und } f \text{ ist das Minimalpolynom von } \alpha \text{ über } \overline{K}.$$

(d) $|B(\alpha)|$ teilt $[L : G']$, wenn $|G| < \infty$.
(e) Wenn $[L : \overline{K}] < \infty$, gibt es ein $\beta \in L$ mit $|B(\beta)| = [L : \overline{K}]$.
(f) $K(B(\alpha))'$ ist Normalteiler in G.