Algebra 2 22. November 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 6

(20) **Untergruppen und Faktorgruppen auflösbarer Gruppen sind auflösbar.**

(21) **Abelsche Gruppen sind zyklisch auflösbar.**
Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}_+$ und Untergruppen $U_0, \ldots, U_r$ von G derart, dass gilt
(a) $U_r =< 1 > \subseteq \cdots \subseteq U_0 = G$
(b) U_{i-1}/U_i ist zyklisch für $1 \leq i \leq r$.

(22) **Der allgemeine Zerfällungskörper.**
Seien $x, x_1, \ldots, x_n$ unabhängige Unbestimmte über dem Körper K, $F = K(x_1, \ldots, x_n)$ und $f = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) \in F[x]$. Die elementaren symmetrischen Polynome aus F seien wie in der Vorlesung mit $s_1, \ldots, s_n$ bezeichnet. Betrachtet werde der Körperturm

$$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_n = F$$

mit $Z_0 = K(s_1, \ldots, s_n)$ und $Z_i = Z_{i-1}[x_i]$ für $0 < i \leq n$.
Zeigen Sie: $[Z_{i+1} : Z_i] = n - i$ für $1 \leq i < n$.

(23) **Miniprojekt: Suche nach einem Körper.**
Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ und $L = \mathbb{Q}[\zeta]$. Geben Sie explizit (mit erzeugender algebraischer Zahl α und deren Minimalpolynom) einen Zerfällungskörper vom Grad 3 über $\mathbb{Q}$ innerhalb L an.

(24) **Zwei kleine Aufgaben zu symmetrischen Polynomen.**
(a) Sei E ein Zerfällungskörper von f über K und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von f mit deg $f = n$. Zeigen Sie: Ist $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$ symmetrisch, dann ist $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overline{K}$.
(b) Stellen Sie die symmetrischen Polynome

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \quad \text{und} \quad \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i + x_j)$$

durch elementare symmetrische Polynome dar.