Algebra 2 29. November 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 7

(25) Sei $f = 2x^4y^5 + 3x^5y^2 + x^3y^9 - x^6y \in \mathbb{Q}[x, y]$. Zeigen Sie, dass es keine Monomordnung gibt, bei der $2x^4y^5$ zum Leitterm wird.
(Nach [AL] Ex. 1.4.16, p. 24; Vertiefung als Ex. 1.4.17)

(26) Sei K ein Körper und $R = K[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}]$ mit unabhängigen Unbestimmten x_1, x_2 über K. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\mu : \mathbb{Z}^2 \to R,\ \alpha \mapsto x^\alpha$ ist injektiv und $\mu(\mathbb{Z}^2)$ ist eine K-Basis von R.

(b) Eine Monomordnung auf $\mathbb{N}^2$ setzt sich eindeutig fort zu einer linearen mit $+$ verträglichen Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$, aber nicht jede solche Ordnung kommt von einer Monomordnung auf $\mathbb{N}^2$ her.

(27) Seien $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\dim < v_1, \ldots, v_n >_{\mathbb{Q}} = n$ und zu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ sei definiert:

$$\alpha \leq_v \beta \ :\Leftrightarrow\ \alpha\, {}^t v \leq \beta\, {}^t v$$

Zeigen Sie:

(a) $\leq_v$ ist eine Monomordnung.

(b) Seien $n \geq 2, v, w \in \mathbb{R}_+^n, v \neq w$. Dann ist $\leq_v \neq \leq_w$.

(c) Es gibt überabzählbar viele paarweise verschiedene Monomordnungen*.

(28) Zwei Wohlordnungen $\leq$ und $\leq'$ auf einer Menge M heißen ähnlich, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : M \to M$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall a, b \in M : \quad a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b).$$

Seien $M = \mathbb{N}^n$ und $n \geq 2$. Zeigen Sie:

(a) $\leq_{\text{lex}}$ und $\leq_{\text{invlex}}$ sind ähnlich.

(b) $\leq_{\text{lex}}$ und $\leq_{\text{grlex}}$ sind nicht ähnlich.

.....

*Man kann allerdings zeigen, dass es für ein gegebenes Ideal I in $K[x_1, \ldots, x_n]$ "im Wesentlichen" nur endlich viele verschiedene Einschränkungen von Monomordnungen auf I gibt. Siehe etwa: [St], Theorem 1.2, page 1