Algebra 2 6. Dezember 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 8

(29)*(a) Seien $f = xy^2z^2 + xy - yz, f_1 = x - y^2, f_2 = y - z^3, f_3 = z^2 - 1$ Polynome in $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ und $F = [f_1, f_2, f_3]$. Berechnen Sie den Rest von f bei Division mit F bezüglich $\leq_{grlex}$ und bezüglich $\leq_{lex}$, jeweils mit der Relation $x > y > z$. Im zweiten Fall empfiehlt es sich, z.B. Maple zu Hilfe zunehmen. `sort(expand(`Polynomausdruck),$[x, y, z]$,`plex`) hilft Polynome geordnet anzuschreiben.

(b) Seien $f_1 = 2xy^2 - x, f_2 = 3x^2y - y - 1$ Polynome in $R = \mathbb{Q}[x, y]$ und $F = [f_1, f_2]$. Finden Sie ein Polynom f aus $< f_1, f_2 >_R$, dessen Rest bei Division mit F bezüglich der Monomordnung $\leq_{grlex}$ mit $x > y$ nicht verschwindet.

(30) In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass auch mit einem unbestimmten, zufälligen Divisionsalgorithmus mit $\{f_1, \ldots, f_s\} \subset R\backslash\{0\}$ für $f \in R$ eine Standarddarstellung

$$f = \sum_{i=1}^{s} a_i f_i + r \text{ mit}$$

(a) $\max(a_i f_i) \leq \max(f)$ für $1 \leq i \leq s$

(b) $r = 0$ oder $r \neq 0$ und kein Monom von r ist aus $\langle LM(f_1), \ldots, LM(f_s)\rangle_R$

in endlich vielen Schritten erreicht werden kann und zwar so, dass von einer Monomordnung nur die Information über die Leitmonome der f_i benötigt wird.
Der Algorithmus soll so verlaufen (o. E.: $LK(f_i) = 1$ für $1 \leq i \leq n$) :
$p := f \quad r := 0;\ a_i := 0; \ldots; a_s := 0;$
`Solange` $p \neq 0$:
`falls für irgend ein` $i \in \{1, \ldots, s\}$ `irgend ein Term` $c_\alpha x^\alpha$ `von` p `durch` $LM(f_i)$ `geteilt wird:`
$p := p - c_\alpha \dfrac{x^\alpha}{LM(f_i)} f_i;\ a_i := a_i + c_\alpha \dfrac{x^\alpha}{LM(f_i)};$
`sonst:` $r := p;\ p := 0;$
Beweisen Sie, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht mit einer Standarddarstellung für f.
Eine Anleitung dazu, wie vorgegangen werden kann, gab es in der Vorlesung. Sie können sich ggf. aber auch an [E] p. 727, Ex. 15.16 orientieren.

(31) Bestimmen Sie ein minimales Erzeugendensystem für das Ideal

$$I = \langle x^k y^l : kl^2 \geq 24\rangle_{K[x,y]}.$$

(32) Zeigen Sie:

(a) Eine monomiale Basis kürzester Länge eines Monomideals ist eindeutig bestimmt.

(b) Eine reduzierte Gröbnerbasis (bzgl. einer gegebenen MO) eines Monomideals ist monomial.

(c) † Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Monomideal $I \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ existiert, das keine Basis mit weniger als n Elementen zulässt.

.....

*Diese Aufgabe ist Teil einer Aufgabe aus der Veranstaltung: "Computergestützes symbolisches Rechnen" von R.Matthes und J.Johannsen im WiSe 2001/2002 am Institut für Informatik in München.

†Ex. 21.15 bei [GaGe]