Algebra 2 13. Dezember 2004
WiSe 2004/2005
Schmale

Aufgabenblatt 9

(33) Bestimmen Sie alle reduzierten GB-en für das Ideal $I = \langle x^2 + y, xy \rangle_R$ in $R = K[x, y]$.
[Anleitung: Man verfolge den Buchberger-Algorithmus in den beiden Fällen "$x^2 > y$" und "$x^2 < y$"]

(34) Seien $R := K[x_1, \ldots, x_n]$ und $f, g \in R \backslash \{0\}$. Mit geeigneten $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$ gelte

$$x^\gamma f = x^\delta g \qquad (\star)$$

(a) Veranschaulichen Sie sich $(\star)$ für $n = 2$ mit Hilfe der entsprechenden Newtonpolytope.

(b) Zeigen Sie direkt, ohne Buchberger's Kriterium zu benutzen:

$$[f, g] \text{ ist universelle Gröbnerbasis von } \langle f, g \rangle_R.$$

[Anleitung zu (b): Wenn in $h := uf + vg$, gilt: $LM(uf) = LM(vg) > LM(h)$, dann ist $LT(uf) + LT(vg) = 0$. Folgere $LT(u)f + LT(v)g = 0$ und betrachte $\overline{u} = u - LT(u), \overline{v} = v - LT(v)$]

(35) **Eine grundlegende Korrespondenz bei algebraischen Gleichungssystemen.**
Seien $R := K[x_1, \ldots, x_n]$ Polynomring in n unabhängigen Variablen über dem Körper K, L eine Körpererweiterung von K, $\mathfrak{M}$ der Idealverband (bzgl. $\subseteq, \cap, +$) von R ($= R$-Untermmodulverband von R), und $\mathfrak{Z}_L$ der Teilmengenverband von L^n (bzgl. $\subseteq, \cap, \cup$). Schließlich seien $\mathfrak{I} : \mathfrak{Z}_L \to \mathfrak{M}$, $\mathfrak{V}_L : \mathfrak{M} \to \mathfrak{Z}_L$ wie folgt definiert.
Für $I \in \mathfrak{M}$ sei $\mathfrak{V}_L(I) = \{v \in L^n : \forall f \in I : f(v) = 0\} =: I'$ und für $V \in \mathfrak{Z}_L$ sei $\mathfrak{I}(V) = \{f \in R : \forall v \in V : f(v) = 0\} =: V'$.
Zeigen Sie:

(a) $V' \in \mathfrak{M} I' \in \mathfrak{Z}_L$ und $\mathfrak{I}, \mathfrak{V}_L$ sind antiton und i.A. nicht injektiv und nicht surjektiv.

(b) $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{V}_L \circ \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$ und $\mathfrak{V}_L \circ \mathfrak{I} \circ \mathfrak{V}_L = \mathfrak{V}_L$.

(c) Sind P, Q Teilmengen von R, dann gilt:

$$\langle P \rangle_R = \langle Q \rangle_R \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{V}_L(P) = \mathfrak{V}_L(Q)$$

(d) Beschreiben Sie für $n = 1$, $K = \mathbb{R}, L = \mathbb{C}$ die abgeschlossenen Mengen ($V'' = V$) in $\mathfrak{Z}_L$ und ($I'' = I$) in $\mathfrak{M}$.

(36) * Seien $p_1 = x^2 + y^2 z - z - 1$, $p_2 = x^2 + \frac{1}{2} y^2 z - z - 1$ in $\mathbb{Q}[x, y, z] = R$. Zeigen Sie:

(a) $p_2 \in \langle f_1, f_2 \rangle_R$, $p_1 \notin \langle f_1, f_2 \rangle_R$ und $\langle f_1, f_2 \rangle_R = \langle h_1, h_2 \rangle_R$ mit

$$f_1 = x^2 + z^2 - 1, \; f_2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 4, \; h_1 = x^2 + z^2 - 1, \; h_2 = y^2 - 2z - 2$$

(b) $\mathfrak{V}_{\mathbb{R}}(x^2 - 1, y^2 - 2) \subseteq \mathfrak{V}_{\mathbb{R}}(p) \supseteq \mathfrak{V}_{\mathbb{R}}(x^2 + z^2 - 1) \cap \mathfrak{V}_{\mathbb{R}}(y^2 - 2z - 2)$

(c) Deuten Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

.....

*Nach [CLS2], Exercise 2 p.20.