

Aufgabenblatt 4

Die folgenden Aufgaben sind mit geringfügigen Änderungen dem Buch [GaGe], §15 entnommen.

(10) (Legendre 1785, genaue Quelle siehe bei [GaGe])

Sei $f = x^3 - 292x^2 + 2170221x + 6656000$ aus $\mathbb{Z}[x]$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Verfahrens von Satz 1 und ggf. des dazu verteilten Maple-Arbeitsblatt in §8 die linearen Teiler von f in $\mathbb{Z}_{13^{2^k}}[x]$, $k = 0, 1, 2$ beginnend mit dem Teiler x in $\mathbb{Z}_{13}[x]$.

(11) Sei $f = 14x^4 + 15x^3 + 42x^2 + 3x + 1$ aus $\mathbb{Z}[x]$.

(i) Bestimmen Sie eine geeignete Primzahl derart, dass f quadratfrei und vom Grad 4 ist modulo p .

(ii) Berechnen Sie die Primzerlegung von f in $\mathbb{Z}_p[x]$. Wählen Sie zwei in $\mathbb{Z}_p[x]$ teilerfremde Polynome g_1, h_1 in $\mathbb{Z}[x]$ derart, dass $f \equiv_p g_1 h_1$, und h_1 modulo p ein normiertes Primpolynom ist, und bestimmen Sie u_1, v_1 in $\mathbb{Z}[x]$ derart, dass $u_1 g_1 + v_1 h_1 \equiv_p 1$.

(iii) Heben Sie die von Ihnen in (ii) gewählte Zerlegung in zwei Schritten nach $\mathbb{Z}_{p^4}[x]$. Kann man nun eine Zerlegung von f in $\mathbb{Q}[x]$ ablesen?

(12) Sei f ein Polynom aus $\mathbb{Z}[x]$ mit höchstem Koeffizienten 1 und vom Grad 8. Sei weiter p eine Primzahl derart, dass $f \equiv_p g_1 g_2 g_3$ mit paarweise verschiedenen normierten Primpolynomen g_1, g_2, g_3 aus $\mathbb{Z}_p[x]$. Es gelte dabei $\deg g_1 = 1$, $\deg g_2 = 2$ und $\deg g_3 = 5$.

(i) Was lässt sich über die möglichen Zerlegungen von f in $\mathbb{Z}_{p^{100}}[x]$ sagen?

(ii) Was lässt sich über die möglichen Zerlegungen von f in $\mathbb{Q}[x]$ sagen?

(iii) Sei q eine weitere Primzahl und gelte $f \equiv_q h_1 h_2$ mit normierten Primpolynomen h_1, h_2 aus $\mathbb{Z}_q[x]$ vom Grad 4. Was lässt sich über mögliche Zerlegungen von f in $\mathbb{Q}[x]$ sagen unter Berücksichtigung aller bis hierhin vorliegenden Informationen?