Modul Computeralgebra mit Gröbnerbasen 26. Mai 2011
Sommersemester 2011
Schmale

Aufgabenblatt 7

(18) Beweisen Sie die Richtung „$\Rightarrow$" von Satz 19 (b) in §12.

(19) Bestimmen Sie alle reduzierten Gröbnerbasen für das Ideal $\langle x^2 + y, xy\rangle_{K[x,y]}$.

(20) Die in dieser Aufgabe behandelten Ideale sind spezielle **Bi**nomideale, die auch "torische" Ideale genannt werden. Zahlreiche Motivationen und eine gründliche Analyse binomischer Ideale findet man in Eisenbud/Sturmfels: Binomial Ideals, *Duke Math.J.*, **84** (1996) 1-45.

Seien U ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}^n$, $R = K[x_1 \ldots, x_n]$,
$\mathcal{B} = \left\{x^\alpha - x^\beta \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \alpha \equiv \beta \mod U\right\}$ und $I_U = \langle \mathcal{B}\rangle_K$.

(a) I_U ist ein Ideal und z. B. $I_{\{0\}} = \{0\}$ und $I_{\mathbb{Q}^n} = \langle x_1 - 1, \ldots, x_n - 1\rangle_R$.
(b) Eine reduzierte Gröbnerbasis von I_U ist stets Teilmenge von $\mathcal{B}$.
(c) I_U ist ein Primideal.

[Anleitung zu (b): Es gibt eine endliche Teilmenge von $\mathcal{B}$, die I_U erzeugt; Buchbergeralgorithmus; beim Divisionsalgorithmus mit Binomen aus $\mathcal{B}$ ist stets Rest + Dividend $\in \mathcal{B}$.
Anleitung zu (c): direkt? mit folgendem Trick geht es für $\{0\} \neq U \neq \mathbb{Q}^n$ auf einem Umweg: Es gibt $A \in \mathbb{Z}^{n\times d}$ mit $n - d = \mathsf{dim}_{\mathbb{Q}} U$ und derart, dass Kern ${}^tA = {}^tU$. Seien $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ die Zeilen von A und $L = K[y_1, y_1^{-1}, \ldots, y_d, y_d^{-1}]$. Betrachte den K-Algebra-Morphismus $\varphi = R \to L$ mit $\varphi(x^\alpha) = y^{\alpha A}$. Insbesondere gilt: $\varphi(x_i) = y^{a^{(i)}}$.
Zu zeigen ist dann Kern $\varphi = I_U$, denn L nullteilerfrei. Der Nachweis von Kern $\varphi = I_U$ geht wohl am besten indirekt: betrachte dabei $f \in$ Kern $\varphi \backslash I_U$ in der Darstellung

$$f = \sum_{v\in\mathbb{Z}^d} h_v = \text{ und } h_v = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ \alpha A = v}} a_\alpha x^\alpha.$$

Auch die Teilsummen bzw. "Komponenten" h_v von f sind in Kern φ und müssen jeweils mindestens zwei Summanden $\neq 0$ haben. O. E. Anzahl der Summanden $\neq 0$ in h_v minimal; subtrahiere geeignetes Binom aus $\mathcal{B}$ um $W!$ zu erhalten.]