Aufgabenblatt 8

(21) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der zu einer gegebenen Monomordnung und gegebenem Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$ und unter der Voraussetzung, dass $\mathsf{dim}_K(R/I)$ endlich ist, eine K-Basis von R/I berechnet. Als Anleitung kann [CLS2] §2 in Kapitel 2 herangezogen werden.

(22) Voraussetzungen wie bei der vorangehenden Aufgabe. Außerdem sei G eine Gröbnerbasis bezüglich der gegebenen Monomordnung. Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der mit Hilfe von G entscheidet, ob endlich viele vorgegebene Monome in R/I K-linear unabhängig sind.

(23) **(a)** Bestimmen Sie alle reduzierten GB-en für das Ideal $I = \langle x^2 + y, xy \rangle_R$ in $R = K[x, y]$.

[Anleitung: Man verfolge den Buchberger-Algorithmus in den beiden Fällen "$x^2 > y$" und "$x^2 < y$"]

(b) Seien $R := K[x_1, \ldots, x_n]$ und $f, g \in R \backslash \{0\}$. Mit geeigneten $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$ gelte

$$x^\gamma f = x^\delta g \qquad (\star)$$

(i) Veranschaulichen Sie sich $(\star)$ für $n = 2$ mit Hilfe der entsprechenden Newtonpolytope.

(ii) Zeigen Sie direkt, ohne Buchberger's Kriterium zu benutzen:

$$[f, g] \text{ ist universelle Gröbnerbasis von } \langle f, g \rangle_R .$$

[Anleitung zu (ii): Wenn in $h := uf + vg$, gilt: $LM(uf) = LM(vg) > LM(h)$, dann ist $LT(uf) + LT(vg) = 0$. Folgere $LT(u)f + LT(v)g = 0$ und betrachte $\overline{u} = u - LT(u), \overline{v} = v - LT(v)$]