Modul Algebra 2 25. April 2006

SoSe 2006

Schmale

Aufgabenblatt 1

(1) Sei D eine nichtleere Menge und $M = \{f : D \to D\} = \mathsf{Abb}\,(D, D)$. M ist bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen ein Monoid. Zeigen Sie:

(a) M ist genau dann endlich, wenn auch D endlich ist.

(b) M ist genau dann kommutativ, wenn D nicht mehr als ein Element enthält.

(c) Sei $D = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ das abgeschlossene Intervall der reellen Zahlen zwischen 1 und 2. Geben Sie in diesem Fall eine nichttriviale (d.h. $\neq \langle \mathsf{id}_D \rangle$) Untergruppe von M an. Bitte unterscheiden Sie genau zwischen Abbildungen (=Funktionen) und deren Funktionswerten.

(2) Zeigen Sie:

Eine endliche Gruppe G gerader Ordnung enthält ein Element g mit den Eigenschaften: $g \neq 1$ und $g^2 = 1$.

Anleitung: Betrachten Sie die Abbildung $h \mapsto h^{-1}$.

(3) (nach Jacobson Basic Algebra p. 39)

(a) Zeigen Sie: Ist $\varphi : \ G \longrightarrow H$ ein Gruppenmorphismus, und $a \in G$, dann gilt $\varphi(\langle a \rangle) = \langle \varphi(a) \rangle$.

(b) Ist die additive Gruppe der ganzen Zahlen isomorph zur additiven Gruppe der rationalen Zahlen ?

(c) Ist die additive Gruppe der rationalen Zahlen isomorph zur multiplikativen Gruppe der von 0 verschiedenen rationalen Zahlen ?