Modul Algebra 2 27. Juni 2006
SoSe 2006
Schmale

Aufgabenblatt 10

(29/30) Seien p, q verschiedene Primzahlen.

(a) Sei $L = \mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]$. Zeigen Sie: $x^2 - q$ ist unzerlegbar in $L[x]$.

(b) Sei $M = L\left[\sqrt{q}\right]$. Zeigen Sie: $M = \mathbb{Q}\left[\sqrt{p} + \sqrt{q}\right]$.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f von $\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)$ über $\mathbb{Q}$.

(d) Bestimmen Sie die übrigen Nullstellen von f.

(e) Bestimmen Sie in $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{p}\right]\right)[x]$ und in $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{q}\right]\right)[x]$ jeweils eine Primzerlegung von f.

(31) Seien K ein Körper, $f \in K[x] \setminus K$, L eine Körpererweiterung von K, N_f die Menge der Nullstellen von f in L, $n = |N_f|$ und $\mathsf{Aut}_K(L)$ die Gruppe der K-linearen Automorphismen von L. Sei $n > 0$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$\Pi : \ \mathsf{Aut}_K(L) \longrightarrow S_n \ \text{ mit } \ \Pi(\sigma) = \sigma_{|_{N_f}}$$

ist ein wohldefinierter Gruppenmorphismus.[1]

(b) Ist $L = K[N_f]$, dann ist Π injektiv.

Das bedeutet, dass in diesem Fall $\mathsf{Aut}_K(L)$ als Untergruppe von S_n aufgefasst werden kann.

(32) **(a)** Sei $f = x^3 - 3x + 1$. f hat die Nullstellen $a_k = \zeta^k + \zeta^{-k}$, $k = 1, 2, 4$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{9}}$. Das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$ ist $x^6 + x^3 + 1$. Zeigen Sie:

$\mathbb{Q}[a_1]$ ist der Zerfällungskörper von f innerhalb $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}[\zeta] \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}[a_1]$.[2]

(b) Geben Sie ein (nicht notwendig unzerlegbares) Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ an, für dessen Zerfällungskörper L gilt

$$[L : \mathbb{Q}] = 12\,.$$

---

[1] Dabei ist $\sigma_{|_{N_f}}$ die Einschränkung der Abbildung σ auf N_f.

[2] Mit etwas Galois-Theorie lässt sich nachweisen, dass es nicht möglich ist, die drei reellen Nullstellen von f durch reelle Wurzelausdrücke darzustellen. Der Umweg über komplexe Einheitswurzeln ist unvermeidbar.