Modul Algebra 2 4. Juli 2006
SoSe 2006
Schmale

Aufgabenblatt 11

(33/34) Die Gleichung vom Grad 3.

Sei K ein Körper, dessen Charakteristik nicht 2 oder 3 ist. Zeigen Sie:

(a) Eine geeignete lineare Substitution führt ein gegebenes Polynom vom Grad 3 in eine **reduzierte Form** $\boldsymbol{f = x^3 + px + q} \in K[x]$ über.

Seien ab jetzt $f = x^3 + px + q \in K[x]$, L ein Zerfällungskörper von f über K und $G = \mathsf{Aut}_K(L)$.

(b) Ist f unzerlegbar, so hat f paarweise verschiedene Nullstellen in L.

(c) $[L : K] \in \{1, 2, 3, 6\}$ und alle Werte kommen vor, wenn man K und f geeignet wählt.

(d) Wenn $[L : K] = 6$, dann ist $G \cong S_3$.

(e) Ist f unzerlegbar und sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Nullstellen von f, ist außerdem

$$\delta := (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)$$

und $\Delta := \delta^2$, die sogenannte **Diskriminante** von f über K, dann gilt: $\boldsymbol{\Delta = -4p^3 - 27q^2}$**.** Insbesondere ist $\Delta \in K$.
[Bemerkung: Dies ist z. B. mit "Maple" leicht nachzurechnen oder man studiert etwa bei Jacobson: Basic Algebra I p. 249 ff. Beachte: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.]

(f) Ist $\delta \in K$, so sind ungerade Permutationen von $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ durch die Automorphismen von G nicht zu bewerkstelligen.

(g) Ist f unzerlegbar, dann gilt: $[L : K] = 3 \Leftrightarrow \delta \in K$ bzw: $[L : K] = 6 \Leftrightarrow \delta \notin K$.

(h) Bestimme $[L : K]$ und G für das Polynom $g = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ und $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Z}_5$ und $K =$ Körper mit 25 Elementen.

(35) Eine Korrespondenz zweier Verbände aus der linearen Algebra.

Sei K ein Körper, $\mathsf{Char}(K) \neq 2$, $n \in \mathbb{N}_+, \mathcal{V} := \{V : V$ Untervektorraum von $K^n\}$, $G = GL(n; K)$ und $\mathcal{U} = \{U : U$ Untergruppe von $G\}$. Zu $V \in \mathcal{V}$ sei $V' := \mathsf{Aut}_V(K^n) := \{P \in G : Pv = v$ für alle $v \in V\}$ und zu $U \in \mathcal{U}$ sei $U' := \mathsf{Fix}_U(K^n) := \{v \in K^n : Pv = v$ für alle $P \in U\}$. Zeigen Sie:

(a) $V' \in \mathcal{U}$ und $U' \in \mathcal{V}$.

(b) $V' = V''', U' = U'''$

(c) $V = V''$, aber i.A. nicht $U = U''$

(d) $U' = \{0\}$, wenn U ein Normalteiler $\neq < 1 >$ in G ist.

Anders als in der Galois-Theorie, passen hier die Verbände $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ nicht so gut zusammen. Bessere Informationen über die Struktur von G können z.B. im Kapitel 6 der Basic Algebra von Nathan Jacobson gefunden werden.