Modul Algebra 2 11. Juli 2006

SoSe 2006

Schmale

Aufgabenblatt 12

(36) Seien $L = K(\alpha)$, α algebraisch über K und f das Minimalpolynom von f über K. Zeigen Sie:

$$\left|\mathsf{Aut}_K(L)\right| = \left|\{\beta \in L : \ f(\beta) = 0\}\right|$$

(37) Seien $\alpha = 2+\frac{10}{9}\sqrt{3}$, $\overline{\alpha} = 2-\frac{10}{9}\sqrt{3}$ und $\beta = \sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\overline{\alpha}}$ (nur positive reelle Wurzeln).

(a) Berechnen Sie $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$.

(b) Beschreiben Sie den kleinsten Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$ innerhalb $\mathbb{C}$, der $\sqrt[3]{\alpha}$ enthält.

(c) Bestimmen Sie $G = \mathsf{Aut}_{\mathbb{Q}}(L), \mathsf{Fix}_G(L)$ und $\sigma(\alpha), \sigma\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)$ für alle $\sigma \in G$.

(38) Seien α eine komplexe Zahl, $\left[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}\right] = 3$, $f = \mathsf{MiPo}_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ und $G = \mathsf{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha]))$.

(a) Geben Sie Beispiele an, in denen $\left|G\right| = 1$, $\left|G\right| = 3$ und begründen Sie warum $\left|G\right| = 2$ hier nicht möglich ist.

(b) Die Nullstellen von f sind die Eigenwerte der $\mathbb{Q}$-linearen Abbildung

$$\mu_\alpha : \mathbb{Q}[\alpha] \longrightarrow \mathbb{Q}[\alpha] \text{ mit } \mu_\alpha(l) = \alpha l \text{ für } l \in \mathbb{Q}[\alpha]$$ [1].

(39/40) Seien L eine Körpererweiterung von K und $\alpha \in L$. Seien weiter $G = \mathsf{Aut}_K(L)$ und $B(\alpha) := \{\beta \in L : \exists\, \sigma \in G : \sigma(\alpha) = \beta\}$ die Bahn von α unter G. Zeigen Sie:

(a) α algebraisch über $K \Rightarrow |B(\alpha)| < \infty$ (Gilt auch die Umkehrung??)

(b) $|B(\alpha)| \leq [L : K]$, wenn $[L : K]$ endlich.

(c) Wenn α algebraisch ist über K, dann ist

$$f := \prod_{\beta \in B(\alpha)} (x-\beta) \in K''[x] \text{ und } f \text{ ist das Minimalpolynom von } \alpha \text{ über } K''.$$

(d) $|B(\alpha)|$ teilt $[L : G']$, wenn $|G| < \infty$.

(e) Wenn $[L : K''] < \infty$, gibt es ein $\beta \in L$ mit $|B(\beta)| = [L : K'']$.

(f) $K(B(\alpha))'$ ist Normalteiler in G.

(41) Sei $N \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ und sei $M = \{\sqrt{p} : \ p \text{ Primzahl, oder } p = -1\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Q}(N) = \mathbb{Q}(M)$,

(b) Ist Z ein Unterkörper von $\mathbb{Q}(N)$ und $[Z : \mathbb{Q}] < \infty$, dann ist $[Z : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2.

(c) $\mathbb{Q}(N)$ ist quadratisch abgeschlossen, d.h. Nullstellen von Polynomen aus $\mathbb{Q}(N)[x]$ vom Grad 2 liegen bereits in $\mathbb{Q}(N)$.

....

[1] (b) ist unabhängig von (a). Betrachte $\mathsf{MiPo}_{\mathbb{Q}}(\mu_\alpha)$ und vergleiche mit $\mathsf{MiPo}_{\mathbb{Q}}(\alpha)$.