Modul Algebra 2 18. Juli 2006
SoSe 2006
Schmale

Aufgabenblatt 13

(42)[1] Finden Sie eine Bedingung, unter der sich für vorgegebene $a, b \in \mathbb{N}$ der Ausdruck

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

zu $\sqrt{c}$ mit geeignetem $c \in \mathbb{N}$ vereinfachen lässt und wie sich in diesem Fall c aus a, b berechnet. b sei dabei kein volles Quadrat. Ist die von Ihnen gefundene Bedingung auch hinreichend? Untersuchen Sie dieselbe Frage für Ausdrücke

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\,.$$

(43) Seien K ein Körper, $\leq$ eine Monomordnung auf $\mathbb{N}^n$, $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Zeigen Sie:

(a) $T_{f \cdot g} \subseteq T_f + T_g$. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $\neq$ eintritt.

(b) $\mathsf{max}_{\leq}(T_{f\cdot g}) = \mathsf{max}_{\leq}T_f + \mathsf{max}_{\leq}T_g$.

(c) $x^\alpha \in \big(T_f + T_g\big) \setminus T_{f\cdot g} \;\Rightarrow\; \big[\alpha < \mathsf{max}_{\leq}\big(T_f + T_g\big) \text{ und } \alpha > \min_{\leq}\big(T_f + T_g\big)\big]$

(44)[2] **(a)** Seien $f = xy^2z^2 + xy - yz, f_1 = x - y^2, f_2 = y - z^3, f_3 = z^2 - 1$ Polynome in $R = \mathbb{Q}[x, y, z]$ und $F = [f_1, f_2, f_3]$. Berechnen Sie den Rest von f bei Division mit F bezüglich $\leq_{grlex}$ und bezüglich $\leq_{lex}$, jeweils mit der Relation $x > y > z$. Im zweiten Fall empfiehlt es sich, z.B. Maple zu Hilfe zunehmen.

`sort(expand(`Polynomausdruck`),`$[x, y, z]$`,plex);`

hilft Polynome geordnet anzuschreiben.

(b) Seien $f_1 = 2xy^2 - x, f_2 = 3x^2y - y - 1$ Polynome in $R = \mathbb{Q}[x, y]$ und $F = [f_1, f_2]$. Finden Sie ein Polynom f aus $< f_1, f_2 >_R$, dessen Rest bei Division mit F bezüglich der Monomordnung $\leq_{grlex}$ mit $x > y$ nicht verschwindet.

(45)[3] Sei K ein Körper und seien $I = \langle x + xy, y + xy, x^2, y^2\rangle_{K[x,y]}$ und $J = \langle x, y\rangle_{K[x,y]}$.
Zeigen Sie: Die beiden Ideale sind gleich.

---

[1] Aufgabe 26 zum Kurs "Einführung in das symbolische Rechnen", Wintersemester 2004/05, Graebe, Leipzig.

[2] Diese Aufgabe ist Teil einer Aufgabe aus der Veranstaltung: "Computergestütztes symbolisches Rechnen" von R.Matthes und J.Johannsen im WiSe 2001/2002 am Institut für Informatik in München.

[3] Die Aufgabe stammt aus dem Buch "Modern Computeralgebra" von Joachim von zur Gathen und Jürgen Gebhard, Cambridge University Press, 1999, Seite 593, zweite Auflage 2003.