Modul Algebra 2 9. Mai 2006
SoSe 2006
Schmale

Aufgabenblatt 3

(7) Sei $Q = \{(a,b,c):\ a \in \{3,-3\},\ b \in \{1,-1\},\ c \in \{-2,2\}\}$ die Menge der Eckpunkte eines Quaders im $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie in Form einer Untergruppe von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ die Gruppe G aller Drehungen und Spiegelungen, die Q auf sich abbilden.

(b) Zeigen Sie $G \cong \mathbb{Z}_2^3$. Dabei wird $\mathbb{Z}_2^3$ als kommutative Gruppe bezüglich der üblichen Vektoraddition benutzt.

(8) **(a)** Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der Gruppe G aus Aufgabe (5) auf die additive Gruppe von $\mathbb{Z}_2$?[1]

(b) Sei $Q = \langle A, B\rangle$ die von $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ erzeugte Untergruppe. Q heißt *Quaternionengruppe*.

Bestimmen Sie alle Normalteiler in Q.

(9) Zwei weitere Beispiele von Normalteilern.

(a) Sei G eine Gruppe und A die Gruppe der Automorphismen von G. Ein Automorphismus σ heißt *innerer Automorphismus von* G, wenn $\sigma = \sigma_g$ mit einem $g \in G$. Dabei ist σ_g wie in Aufgabe 6 (a) erklärt.

Zeigen Sie: Die Menge I der inneren Automorphismen ist ein Normalteiler bezüglich der Verknüpfung $\circ$ in A.

(b)[2] Sei F die in der Vorlesung konstruierte von $T = \{x, y\}$ erzeugte freie Gruppe. Wir schreiben $b_1 \cdots b_l$ statt $(b_1, \ldots, b_l)$, x^{-1} statt x', y^{-1} statt y', und wir lassen das Verknüpfungssymbol $*$ beim Anschreiben von Produkten weg.[3]
Zeigen Sie: Die von $\{x^2, xyx^{-1}, y\}$ erzeugte Untergruppe G in F ist ein Normalteiler vom Index 2.

Bemerkung: Ein Resultat von Nielsen und Schreyer besagt, dass auch die Untergruppen von F allesamt freie Gruppen sind. Da G endlichen Index in F hat, lässt sich die Anzahl freier Erzeugender aus der Formel $1 + [F : G](r - 1)$ berechnen, wobei r die Anzahl der freien Erzeugenden von F ist. Im Beispiel dieser Aufgabe ist demnach die Gruppe G isomorph zu einer von 3 Elementen frei erzeugten Gruppe. Die bisher in dieser Vorlesung erarbeiteten Kenntnisse reichen aus, um die entsprechenden Passagen etwa in dem folgenden Klassiker zur Gruppentheorie zu studieren: *Marshall Hall (Junior), The Theory of Groups, Kapitel 7, z.B.: Macmillan, 1967.*

---

[1] Die in Aufgabe (5) (b) bereits geleistete Arbeit lässt sich ausnutzen. Warum?
[2] Teil einer Übungsaufgabe aus Algebra 1, Saarbrücken , WiSe 2003/2004
[3] Beispiel: Die Gleichung $(x, y, x, y) * (y', x', y, x') = (x, y, y, x')$ geht über in $(xy)^2y^{-1}x^{-1}yx^{-1} = xy^2x^{-1}$.