Modul Algebra 2 16. Mai 2006
SoSe 2006
Schmale

Aufgabenblatt 4

(10) Zu $a, b \in \mathbb{N}$ sei $a \vee b = \max\{a, b\}$. Mit dieser Verknüpfung ist $(\mathbb{N}, \vee, 0)$ ein kommutatives Monoid und jede Teilmenge von $\mathbb{N}$, die 0 enthält, ist ein Untermonoid. Jede beliebige Teilmenge ist Monoid bezüglich $\vee$, allerdings u.U. mit einem von 0 verschiedenen neutralen Element.

Seien nun $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_1 = \{2, 3, 5\}$ und $N_2 = \{1, 4\}$.

(a) Geben Sie einen surjektiven Monoidmorphismus $f_2 : M \to N_2$ an mit $f_2(2) = 1$ und $f_2(3) = 4$ ([1]).

(b) Geben Sie für Ihre Abbildung f_2 alle Monoidmorphismen $f_1 : M \to N_1$ an, für die es einen Monoidmorphismus $g : N_1 \to N_2$ gibt mit der Eigenschaft $g \circ f_1 = f_2$.

Nachweise nicht vergessen.

(11) Weisen Sie ähnlich wie im Beispiel 1.5.3 nach, dass die Quaternionengruppe Q frei erzeugt ist von zwei Elementen x, y mit den definierenden Relationen

$$x^4,\ y^4,\ x^2y^{-2},\ xy^2x^{-1}y^{-2},\ xyx^{-1}y^{-3}\ .$$

(12) Sei K ein Körper und $D = K^{2\times 2}$. In dieser Aufgabe werden die "Permutationen" $\alpha, \beta, \gamma \in S(D)$ betrachtet mit

$$\alpha(A) = {}^{\mathsf{t}}A,\ \beta(A) = {}^{\mathsf{s}}A,\ \gamma(A) = AP \qquad \text{für alle} \ \ A \in K^{2\times 2}$$

dabei ist für $A \in K^{2\times 2}$

$${}^{\mathsf{s}}A = P \cdot {}^{\mathsf{t}}A \cdot P \ \ \text{mit } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Untergruppe $U = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ von S(D).

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von U.

(b) Kann U mit weniger als drei Elementen erzeugt werden ?

(c) Zeigen Sie: In U gibt es Untergruppen, die nicht Normalteiler sind und benutzen Sie eine Teilaussage des Homomorphiesatzes, um zu zeigen, dass die Gruppe U aus dieser Aufgabe nicht isomorph ist zur Quaternionengruppe Q aus Aufgabe (8)(b) bzw. aus Beispiel 1.5.3..

Zusatzfrage: Welche Relationen zwischen ihren Erzeugern reichen aus, um U zu beschreiben ([2]) ?

Bemerkung: Ausgehend von Symmetriebetrachtungen am Quadrat $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Eckenmenge $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 :\ a, b, \in \{1, -1\} \right\}$ erhält man eine zu U isomorphe Untergruppe von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

....

[1] Empfohlene Schreibweise für die in Aufgabe (10) auftretenden Abbildungen: $f = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ f(i_1) & \cdots & f(i_r) \end{pmatrix}$.

[2] Eine derartige Information ist z.B. wesentlich, wenn es darum geht, die Vereinfachung von komplizierteren Ausdrücken in α, β, γ effizient zu programmieren.