Modul Algebra 2 23. Mai 2006
SoSe 2006
Schmale

Aufgabenblatt 5

(13) [1] Im **Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen** (so, wie er in der Vorlesung eingeführt wurde) seien

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\big(E, I, J, K\big)$ ist eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{H}$.

(b) $A \in \mathbb{H}$ ist Nullstelle des Polynoms

$$f_A = X^2 - \mathsf{Spur}\,(A)X + \mathsf{det}\,(A) \in \mathbb{R}[X].$$

(c) Alle Quaternionen sind Nullstellen des "Schief"-Polynoms

$$X^2IXI + IX^2IX - IXIX^2 - XIX^2I \in \mathbb{H}[X].$$

D.h.: Einsetzen einer beliebigen Quaternione für X ohne Benutzung eines Kommutativgesetzes ergibt 0. Anleitung: benutzen Sie (b).

(14) **Monoidringe.** Seien R ein Ring, M ein Monoid und $R^M = \mathsf{Abb}\,(M, R)$. Für die Verknüpfung im M werde das Zeichen $\diamond$ benutzt. Mit ε werde das neutrale Element von M bezeichnet. R^M ist ein Ring mit den im Beispiel 2 (d), § 6 angegebenen Verknüpfungen. Sei weiter $R^{(M)} = \{f \in R^M :\ f^{-1}(R \setminus \{0\}) \text{ endlich }\}$. Wenn M endlich ist, dann ist $R^M = R^{(M)}$. Stets ist $R^{(M)}$ ein Unterring von R^M. Wir führen nun in $R^{(M)}$ einen neue Multiplikation ein. Für $f, g \in R^{(M)}$ sei $f \star g$ die Abbildung mit

$$\big(f \star g\big)(m) = \sideset{}{'}\sum_{\mu\diamond\nu=m} f(\mu)g(\nu) \quad \text{für} \quad m \in M$$

Oft wird $\star$ als **Faltungsprodukt** bezeichnet. Der Apostroph beim Summenzeichen soll besagen, dass es nur endlich viele Summanden gibt, bei denen $f(\mu)g(\nu) \neq 0$ ist. Zu $k \in M$ sei schließlich $e^{(k)}$ die Abbildung mit

$$e^{(k)}(m) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & , & \text{wenn } k \neq m \\ 1 & , & \text{wenn } k = m \end{array} \right\}$$

Zeigen Sie:

(a) $\star$ ist eine Verknüpfung auf $R^{(M)}$ und auch mit $\star$ als Multiplikation ist $R^{(M)}$ ein Ring, der kommutativ ist, falls R und M dies sind.

$R^{(M)}$ heißt Monoidring, bzw. **Gruppenring**, falls M eine Gruppe ist.

(b) $E_M = \{e^{(k)} :\ k \in M\}$ ist ein zu M isomorphes Untermonoid von $R^{(M)}$. Insbesondere gilt $e^{(k)} \star e^{(l)} = e^{(k\diamond l)}$ für $k, l \in M$.

(c) Wird $\mathbb{N}$ als Monoid bezüglich der Addition natürlicher Zahlen betrachtet ($\diamond = +$) und schreibt man x statt $e^{(1)}$, dann hat $f \in R^{(\mathbb{N})}$ die eindeutige Darstellung $f = \sideset{}{'}\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)x^n$.

(15) **Rechnen mit Nebenklassen als Mengen:**
Seien R ein kommutativer Ring und I ein Ideal in R. Für zwei nichtleere Teilmengen M, N von R sei definiert: $M * N = \{m * n : m \in M,\ n \in N\},\ * \in \{+, \cdot\}$.
Ist $M = \{a\}$ einelementig, so schreibt man $a + N$ statt $\{a\} + N$.
Zeigen Sie ausführlich:

(a) Für $a, b \in R$ gilt: $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$

(b) Für $a \in I$ gilt: $a + I = I$

(c) Für $a, b \in R$ gilt: $(a + I) \cdot (b + I) \subseteq ab + I$

(d) Mit $R = \mathbb{Z}$, $I = 4\mathbb{Z}$, $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ gilt: $(r_1 + I) \cdot (r_2 + I) \neq r_1r_2 + I$

(e) Vergleichen Sie mit den Verknüpfungen in $R/_I$!

....

[1] Reichlich Informationen zu Quaternionen gibt es in dem Buch "Zahlen" von Ebbinghaus e.a., Springer, seit 1983 mehrere Auflagen in verschiedenen Sprachen.