Aufgabenblatt 6

(16) Sei R ein kommutativer Bereich. Zu $a \in R$ sei $T_a = \{r \in R : r \mid a\}$. Zeigen Sie:

(a) $T_a = T_b \iff a \sim b \iff aR = bR$

(b) a unzerlegbar $\iff T_a = \big(a\,G(R)\big) \cup G(R)$

(c) $c \in T_a \cap T_b \iff aR + bR \subseteq cR$

(17) Bestimmen Sie den Kern des Ringmorphismus

$$\Phi : \mathbb{Z}_5[x] \to \mathsf{Abb}\,(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5), \quad p = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \mapsto f_p = \Phi(p)$$

Dabei ist $f_p(\alpha) = \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha^i$ für $\alpha \in \mathbb{Z}_5$.
Erinnern Sie sich dabei an den für Polynome geforderten Identitätssatz, der hier besagt:

$$\forall d \in \mathbb{N}\ \forall a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}_5 : \ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = 0 \Leftrightarrow a_0 = \cdots = a_d = 0.$$

Anleitung: Suchen Sie ein Polynom $g \in \mathbb{Z}_5[x]$ kleinsten Grades (Nachweis) mit den Nullstellen $0, 1, 2, 3, 4$ in $\mathbb{Z}_5$. Dann ist $f_g = 0$. Division mit Rest.

(18) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $R = \mathsf{Abb}\,([0,1]^n, \mathbb{R})$ mit den im Beispiel 6.1.2 angegebenen Verknüpfungen. Zu $v = (a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$ sei $I_v = \{f \in R : f(v) = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) I_v ist ein maximales Ideal.

Anleitung: Sei $f_v \in I_v$ mit $f_v(t) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - v_i)^2$ für $t \in [0,1]^n$. Zu $f \in R \setminus I_v$ ist dann $f^2 + f_v \in G(R)$.

(b) ${}^{R}/_{I_v} \cong \mathbb{R}$.

Anleitung: Betrachten Sie $\pi_v : R \to \mathbb{R}\ ; f \mapsto f(v)$.

(c) Sei U ein Unterring von R (z.B. stetige oder Polynomfunktionen). Ist $U \cap I_v$ ein maximales Ideal ?