Modul Algebra 2 13. Juni 2006
SoSe 2006
Schmale

Aufgabenblatt 8

(22) Unterringe von $\mathbb{Q}$. Sei U ein von $\mathbb{Z}$ verschiedener Unterring von $\mathbb{Q}$.
Bestimmen Sie ein multiplikatives Untermonoid N von $\mathbb{N}_+$ derart, dass

$$U = \{z \cdot n^{-1} : \; z \in \mathbb{Z}, \, n \in N\}.$$

Anleitung: Betrachten Sie die Menge P der Primzahlen, die in U invertierbar sind und das davon erzeugte Untermonoid N in $\mathbb{N}_+$. Zeigen Sie dann: $U \subseteq U'$ und $U' \subseteq U$. Dabei hilft eine geeignete Bézoutidentität, z.B.: $zz' + mm' = 1$ impliziert (warum ?) $p \in P$, falls $zm^{-1} \in U$ und p Primteiler von m.
Alternative: $N := \{m \in \mathbb{N}_+ : \; \exists z \in \mathbb{Z} : zm^{-1} \in U \text{ und } \mathsf{ggT}(z,m) = 1\}$; ist N ein Untermonoid?

(23) Weitere "Absolutbeträge" auf $\mathbb{Q}$. Sei p eine Primzahl und seien $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
Wir setzen fest

$$|\,0\,|_p := 0 \quad \text{und} \quad \left|\,\frac{a}{b}\,\right|_p := \left(\frac{1}{p}\right)^{v_p(a)-v_p(b)}$$

Zeigen Sie:

(a) $\left|\,\frac{a}{b}\,\right|_p = \left|\,\frac{a'}{b'}\,\right|_p$, wenn $a', b' \in \mathbb{Z}$ und $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

(b) $|\;\;|_p$ ist ein Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$, d.h. für $q, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ gelten die folgenden Regeln:

(i) $|\,q\,|_p \geq 0$
(ii) $|\,q_1 \cdot q_2\,|_p = |\,q_1\,|_p \cdot |\,q_2\,|_p$
(iii) $|\,q_1 + q_2\,|_p \leq |\,q_1\,|_p + |\,q_2\,|_p$

Außerdem gilt folgende Verschärfung von (iii):

(iv) $|\,q_1 + q_2\,|_p \leq \mathsf{max}\,(|\,q_1\,|_p \,, |\,q_2\,|_p)$

(c) Geben Sie ein Beispiel einer $|\;\;|_p$-Nullfolge rationaler Zahlen $\big(q_k\big)_{k\geq 0}$ an mit $q_k \neq q_{k+1}$ für $k \geq 0$.

Bemerkung: Analysis bezüglich $|\;\;|_p$ heißt *p-adische Analysis.* So wie die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen als Körper der Grenzwerte von Cauchyfolgen bezüglich des üblichen Absolutbetrages hervorgehen, gehen auch die p-adischen Körper $\mathbb{Q}_p$ aus $\mathbb{Q}$ hervor, aber jeweils bezüglich $|\;\;|_p$. Die Elemente von $\mathbb{Q}_p$ heißen *p-adische Zahlen.*

(24) Sei $\mathcal{A}$ der **Ring der reellen analytischen Funktionen**[1] ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) und $\mathcal{H}$ die Menge der Hauptideale in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: $\mathcal{H}$ ist nicht Noether'sch.
Anleitung: Zu $f, g \in \mathcal{A}$ seien N_f, N_g die Nullstellenmengen. Es gilt: $f|g \Rightarrow N_f \subseteq N_g$ und es gibt $f_k \in \mathcal{A}$ mit $N_{f_k} = 2^k\mathbb{Z}$. Benutzen Sie außerdem für $f, g \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$:
$\big[\forall \alpha \in \mathbb{R} : \mu_\alpha(f) \leq \mu_\alpha(g)\big] \;\Rightarrow\; f \mid g$ in $\mathcal{A}$. Dabei ist $\mu_\alpha(f)$ die Vielfachheit der Nullstelle α von f.

....

[1] In der Funktionentheorie lässt sich nachweisen, dass $\mathcal{A}$ nullteilerfrei ist. Auf Grund der Aufgabe ist $\mathcal{A}$ nicht faktoriell. Lässt man allerdings konvergente unendliche Produkte zu, gibt es auf Grund des Weierstraß'schen Produktsatzes (`http://mathworld.wolfram.com/WeierstrassProductTheorem.html`) dennoch i.W. eindeutige Zerlegungen in unendliche Produkte von Primelementen.