Modul Algebra 2
SoSe 2006
W.Schmale

Im Rahmen der Umstellung auf gestufte Studiengänge wurde die bisherige Sequenz

Lineare Algebra 1, lineare Algebra 2, Einführung in die Algebra

ersetzt durch die Sequenz

Lineare Algebra, Algebra („lineare Algebra 2 und Einführung in die Algebra"), Algebra 2.

Der Modul Algebra 2 ersetzt entsprechend, anders als der Name vielleicht vermuten lässt, zu einem großen Teil die bisherige Einführung in die Algebra.

Kurze Inhaltsangaben

Kapitel 1 Monoide und Gruppen

§1 Erste Definitionen, Eigenschaften und Beispiele

Monoide, Gruppen, Untermonoide, Untergruppen, Abbildungsmonoide und Abbildungsgruppen, Erzeugung, Zyklizität, Morphismen, Bild und Kern,Satz von Cayley, viele Beispiele.

§2 Abbildungsgruppen, Bahnen, Zyklen

Gruppenoperation, Zyklenschreibweise für Permutationen, Bahnzerlegung und Zyklenzerlegung,Nebenklassen, Satz von Lagrange.

§3 Erzeugung und Konstruktion von Monoiden und Gruppen

Beispiele zur Erzeugung von Gruppen, zyklische Gruppen, Morphismen und Erzeugendensysteme, Erzeugung von S_n, Erzeugung des multiplikativen Monoids $\mathbb{N}$, freie Monoide und Gruppen, universelle Abbildungseigenschaft, Konstruktion freier Gruppen und Monoide.

§4 Abbildungen, Morphismen, Homomorphiesatz

Homomorphiesatz für Abbildungen, Monoide und Gruppen, Faktormonoid, Normalteiler, Faktorgruppe.

§5 Erzeugung von freien Gruppen mit vorgegebenen Relationen

Definierende Relationen, Beispiele von freien Gruppen mit vorgegebenen Relationen, Eindeutigkeit, freie kommutative Gruppen, Informationen über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

Kapitel 2 Ringe

§6 Ringe, Ringmorphismen und viele Beispiele

Ring, Unterring, Körper, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $R^{m\times n}$, Abb(M, R) $\mathbb{Z}_d$, Polynomringe, Monoidringe, $\mathbb{H}$, Weylalgebra, Ringmorphismen, Restabbildungen, Einsetzungsmorphismen.

§7 Homomorphiesatz, Faktorringe, Eigenschaften von Kern und Bild

Außerdem: Erzeugung von Idealen, maximale Ideale, Primideale und Zusammenhang mit Eigenschaften des Faktorringes.

§8 Euklidische Ringe, Hauptidealringe und deren Faktorringe

Euklidische und Hauptidealringe, gV, gT, kgV, ggT, prim, unzerlegbar und entsprechende Hauptidealeigenschaften, verschiedene Darstellungen für $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ und $K[x]/fK[x]$, komplexe und konstruierte Nullstellen, Berechnung von Inversen in Restringen, Berechnung von kgV und ggT.

§9 Chinesischer Restsatz

Idealtheoretische Variante, simultane Kongruenzen, Sonderfälle $\mathbb{Z}$ und $K[x]$, Zusammenhang zur Interpolation.

§10 Quotientenbildung

partielle Quotientenbildung bezüglich eines multiplikativen und nullteilerfreien Untermonoids eines kommutativen Ringes.

§11 Faktorielle Ringe

Existenz von Zerlegungen: aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale, Eindeutigkeit bis auf Anordnung: unzerlegbar = prim, Vielfachheitenfunktionen und Anwendungsbeispiele, weitere faktorielle Ringe, Inhalt eines Polynoms über einem faktoriellen Ring.

§12 entfällt: Numerierungsfehler

§13 Vorrat an Primpolynomen und Unzerlegbarkeitskriterien

Wann hat ein faktorieller Ring unendlich viele nichtassoziierte Primelemente ? Reduktions- Substitutions- und Eisensteinkriterium, Beispiele.

Kapitel 3 Körper: Endliche Körpererweiterungen und algebraische Gleichungen in einer Variablen

§14 Endlich erzeugte und algebraische Körpererweiterungen

endliche und endlich erzeugte Erweiterungen, $K[E]$ und $K(E)$, einfache Erweiterungen und homomorphe Bilder von Polynomringen, algebraisch, transzendent, Minimalpolynom, Dimensionsformel für endliche Erweiterungen,Beispiele, relativer algebraischer Abschluss, Körper der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$, Abzählbarkeit von $\mathbb{A}$.

§15 Zerfällungskörper

Existenz von Zerfällungskörpern für ein Polynom, Eindeutigkeit innerhalb eines algebraisch abgeschlossenen Körpers, Eindeutigkeit bis auf Isomorphie formale Ableitung, Satz vom "primitiven" Element, Beispiele, Satz von Steinitz über die Endlichkeit der Menge der Zwischenkörper.

§16 Weitere Bemerkungen, Motivationen, Ausblick

Hier steigen nach 2/3 der Vorlesung die Bachelor-Studierenden aus.

§17 Konjugierte Körper

Konjugierte Körperelemente und Körper, K-lineare Automorphismen einer Körpererweiterung von K, Charakterisierung von Zerfällungskörpern, Invarianz, Fixelemente, Galois-Erweiterungen.

§18 Fortsetzungssatz

Ergänzungen zu den bisherigen Ergebnissen über Fortsetzungen von Isomorphismen, zwei Anwendungen.

§19 Galoistheorie: Abriss

Vorbemerkungen, Zwischenkörper- und Untergruppenverband, Fix und Aut, sog. Hauptsatz der Galois-Theorie mit exemplarischen Beweisen der methodisch interessanten Teilaussagen, Galoisgruppe eines Polynoms, Lösbarkeit durch Radikale, auflösbare Gruppen, Lösbarkeitskriterium, Beispiele.

Kapitel 4 Polynome in mehreren Variablen

Einige Vorbemerkungen und Motivationen zur Beschäftigung mit Polynomen in mehreren Variablen.

§20 Grundlegende Definitionen

Monomordnungen, Wohlordnung, $\leq_{lex}$ und $\leq_{grlex}$, LM(f), LT(f), LK(f) , max$_{\leq}(f)$, Beispiele.

§21 Divisionsalgorithmus

Multidivision mit Rest bezüglich einer Monomordnung, Divisionsalgorithmus, Korrektheitsbeweis mit verallgemeinerter Induktion

§22 Dickson-Lemma, Nullstellensatz und Gröbnerbasen

Monomideale, Anfangsideale, Dickson-Lemma (ohne Beweis), Hilbertscher Basissatz, Gröbnerbasen, Eigenschaften von Gröbnerbasen, minimale und reduzierte Gröbnerbasen, Beispiele.

§23 Berechnung von Gröbnerbasen und Ausblick

S-Polynome, Buchbergerkriterium (ohne Beweis), Buchbergeralgorithmus mit Korrektheitsbeweis, Beispiele und Bemerkungen.